

問題解答例 for section 4.3 (教科書 p.99)

学生側

私は大阪大学の1年生です。理系学部にいますが数学科ではありません。下記にいくつか問題を書きますので、その解答にたどりつく過程も含めて解答を教えてください。なるべくわかりやすくお願いしますが、かといって単に推測や例のみから解答を納得させるようなやり方ではなく、あくまで数学の解答として通用するものをお願いします。

問 2 (2) 関数 $z = x \sin(xy)$ の2次の偏導関数をすべて求めよ。

問 4 $z = f(x, y)$, $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ のとき、関係式 $z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + (1/r)z_r + (1/r^2)z_{\theta\theta}$ が成り立つことを示せ。ただし、 z_a は $\partial z / \partial a$ を簡略化した記法である。

問 5 (2) 関数 $f(x, y) = \cos(x + 2y)$ に対して、中心を $(0, 0)$ とした Taylor 展開式を示せ。ただしその際、剰余項は2階微分とする。

ChatGPT

まず各問について、偏微分の計算規則を明示しながら進めます。問 4 は記法上、同じ z を (x, y) の関数としても (r, θ) の関数としても見ている点が少し紛らわしいので、そこを分けて説明します。

以下では、偏微分はすべて通常の連鎖率・積の微分を用いて計算します。

問 2 (2)

$$z = x \sin(xy)$$

の2次の偏導関数をすべて求めます。

まず1次の偏導関数を求めます。

x で偏微分

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x} \{x \sin(xy)\}$$

積の微分より、

$$z_x = \sin(xy) + x \frac{\partial}{\partial x} \sin(xy)$$

ここで

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin(xy) = \cos(xy) \cdot y$$

なので、

$$z_x = \sin(xy) + xy \cos(xy)$$

y で偏微分

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y} \{x \sin(xy)\}$$

x は定数として扱うので、

$$z_y = x \cos(xy) \cdot x = x^2 \cos(xy)$$

したがって

$$z_x = \sin(xy) + xy \cos(xy), \quad z_y = x^2 \cos(xy)$$

です。

次に 2 次の偏導関数を求めます。

z_{xx}

$$z_x = \sin(xy) + xy \cos(xy)$$

より、

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \{\sin(xy) + xy \cos(xy)\}$$

まず

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin(xy) = y \cos(xy)$$

また、

$$\frac{\partial}{\partial x} \{xy \cos(xy)\} = y \cos(xy) + xy \{-y \sin(xy)\}$$

なので、

$$z_{xx} = y \cos(xy) + y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy)$$

したがって

$$z_{xx} = 2y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy)$$

z_{xy}

$$z_x = \sin(xy) + xy \cos(xy)$$

を y で偏微分します。

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \{\sin(xy) + xy \cos(xy)\}$$

まず

$$\frac{\partial}{\partial y} \sin(xy) = x \cos(xy)$$

また、

$$\frac{\partial}{\partial y} \{xy \cos(xy)\} = x \cos(xy) + xy \{-x \sin(xy)\}$$

なので、

$$z_{xy} = x \cos(xy) + x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)$$

したがって

$$\boxed{z_{xy} = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)}$$

z_{yx}

$$z_y = x^2 \cos(xy)$$

を x で偏微分します。

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \{x^2 \cos(xy)\}$$

積の微分より、

$$z_{yx} = 2x \cos(xy) + x^2 \{-y \sin(xy)\}$$

したがって

$$\boxed{z_{yx} = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)}$$

実際、

$$z_{xy} = z_{yx}$$

となっています。

z_{yy}

$$z_y = x^2 \cos(xy)$$

を y で偏微分します。

$$z_{yy} = x^2 \{-x \sin(xy)\}$$

したがって

$$\boxed{z_{yy} = -x^3 \sin(xy)}$$

よって、2 次の偏導関数は

$$z_{xx} = 2y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy)$$

$$z_{xy} = z_{yx} = 2x \cos(xy) - x^2y \sin(xy)$$

$$z_{yy} = -x^3 \sin(xy)$$

です。

問 4

$$z = f(x, y), \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

のとき、

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r}z_r + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}$$

を示します。

これは直交座標 (x, y) におけるラプラシアン

$$z_{xx} + z_{yy}$$

を、極座標 (r, θ) で表した公式です。

ただし、極座標では $r = 0$ で θ が定まらないので、以下では

$$r > 0$$

として計算します。

極座標では

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

と考えられます。

まず必要な偏導関数を求めます。

$$r_x = \frac{x}{r} = \cos \theta, \quad r_y = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

また、

$$\theta_x = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \theta_y = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

です。

したがって連鎖率より、

$$z_x = z_r r_x + z_\theta \theta_x$$

なので、

$$z_x = \cos \theta z_r - \frac{\sin \theta}{r} z_\theta$$

同様に、

$$z_y = z_r r_y + z_\theta \theta_y$$

だから、

$$z_y = \sin \theta z_r + \frac{\cos \theta}{r} z_\theta$$

ここからさらに x, y で偏微分します。

計算を短く書くため、

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta$$

とおきます。

すると

$$z_x = cz_r - \frac{s}{r} z_\theta, \quad z_y = sz_r + \frac{c}{r} z_\theta$$

です。

この式をもう一度偏微分すると、計算の結果

$$z_{xx} = c^2 z_{rr} - \frac{2cs}{r} z_{r\theta} + \frac{s^2}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{s^2}{r} z_r + \frac{2cs}{r^2} z_\theta$$

となります。

また同様に、

$$z_{yy} = s^2 z_{rr} + \frac{2cs}{r} z_{r\theta} + \frac{c^2}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{c^2}{r} z_r - \frac{2cs}{r^2} z_\theta$$

となります。

この2つを足すと、

$$z_{xx} + z_{yy} = (c^2 + s^2) z_{rr} + \frac{s^2 + c^2}{r} z_r + \frac{s^2 + c^2}{r^2} z_{\theta\theta}$$

となります。

ここで

$$c^2 + s^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

なので、

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta}$$

を得ます。

したがって、

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta}$$

が示されました。

問 5 (2)

$$f(x, y) = \cos(x + 2y)$$

について、中心を $(0, 0)$ とした Taylor 展開式を求めます。

ここで「剰余項は 2 階微分」と指定されているので、1 次までの Taylor 多項式に、2 階微分を用いた剰余項を付けます。

まず偏導関数を求めます。

$$f(x, y) = \cos(x + 2y)$$

なので、

$$f_x(x, y) = -\sin(x + 2y)$$

$$f_y(x, y) = -2\sin(x + 2y)$$

です。

したがって原点では、

$$f(0, 0) = 1$$

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0$$

です。

したがって 1 次までの Taylor 多項式は

$$1$$

だけになります。

次に 2 階微分を求めます。

$$f_{xx}(x, y) = -\cos(x + 2y)$$

$$f_{xy}(x, y) = -2\cos(x + 2y)$$

$$f_{yy}(x, y) = -4\cos(x + 2y)$$

です。

2 変数関数の Taylor の定理より、ある $0 < \lambda < 1$ が存在して、

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(\lambda x, \lambda y)x^2 + 2f_{xy}(\lambda x, \lambda y)xy + f_{yy}(\lambda x, \lambda y)y^2 \}$$

と書けます。

ここに先ほど求めた値を代入します。

$$f_{xx}(\lambda x, \lambda y) = -\cos(\lambda x + 2\lambda y) = -\cos(\lambda(x + 2y))$$

$$f_{xy}(\lambda x, \lambda y) = -2\cos(\lambda(x + 2y))$$

$$f_{yy}(\lambda x, \lambda y) = -4\cos(\lambda(x + 2y))$$

したがって、

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{2} \{-x^2 \cos(\lambda(x + 2y)) - 4xy \cos(\lambda(x + 2y)) - 4y^2 \cos(\lambda(x + 2y))\}$$

よって、

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2} (x^2 + 4xy + 4y^2) \cos(\lambda(x + 2y))$$

すなわち、

$$\cos(x + 2y) = 1 - \frac{1}{2} (x + 2y)^2 \cos(\lambda(x + 2y))$$

となります。ただし、

$$0 < \lambda < 1$$

です。

これが、剰余項を2階微分で表した Taylor 展開式です。

なお、参考までに、通常の2次までの Taylor 展開として書くなら

$$\cos(x + 2y) = 1 - \frac{1}{2} (x + 2y)^2 + 3 \text{ 次以上の項}$$

です。展開すると、

$$\cos(x + 2y) = 1 - \frac{1}{2} x^2 - 2xy - 2y^2 + 3 \text{ 次以上の項}$$

となります。