

問題解答例 for section 4.2 (教科書 p.90)

学生側

私は大阪大学の1年生です。理系学部におりますが数学科ではありません。下記にいくつか問題を書きますので、その解答にたどりつく過程も含めて解答を教えてください。なるべくわかりやすくお願いしますが、かといって単に推測や例のみから解答を納得させるようなやり方ではなく、あくまで数学の解答として通用するものをお願いします。

問3 (1) 曲面 $z = 3x^2y + xy$ の点 $(1, -1, -4)$ における接平面と法線の方程式を求めよ。

問4 (3) 合成関数の微分を用いて、つまり、連鎖率を用いて、 dz/dt を求めよ。ただし、 $z = e^{x^2y}$, $x = \cos(t)$, $y = t^2$ である。

問5 (3) 合成関数の微分を用いて、つまり、連鎖率を用いて、 $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial v$ を求めよ。ただし、 $z = f(x, y)$, $x = 2u - 3v$, $y = u - 5v$ である。

問8 (1) $z = f(x, y)$, $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ のとき、 $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial \theta$ を $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ を用いて表わせ。

chatGPT

4問とも連鎖率・接平面の標準問題なので、各問で「使う公式」→「偏微分」→「代入」→「答え」の順に整理します。

以下では、 $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ のように書きます。

問3 (1)

曲面は

$$z = 3x^2y + xy$$

です。右辺を

$$f(x, y) = 3x^2y + xy$$

とおくと、曲面は

$$z = f(x, y)$$

という形です。

点 $(1, -1, -4)$ が曲面上にあることを確認すると、

$$f(1, -1) = 3 \cdot 1^2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -3 - 1 = -4$$

なので、確かに曲面上の点です。

接平面の公式は

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

です。

まず偏導関数を求めます。

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y + xy) = 6xy + y$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + xy) = 3x^2 + x$$

点 $(x_0, y_0) = (1, -1)$ での値は

$$f_x(1, -1) = 6 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) = -6 - 1 = -7$$

$$f_y(1, -1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$$

したがって接平面は

$$z - (-4) = -7(x - 1) + 4(y - (-1))$$

すなわち

$$z + 4 = -7(x - 1) + 4(y + 1)$$

です。整理すると、

$$z + 4 = -7x + 7 + 4y + 4$$

$$z = -7x + 4y + 7$$

したがって接平面の方程式は

$$z = -7x + 4y + 7$$

です。標準形で書けば

$$7x - 4y + z - 7 = 0$$

です。

この平面の法線ベクトルは

$$(7, -4, 1)$$

です。したがって、点 $(1, -1, -4)$ を通り、方向ベクトル $(7, -4, 1)$ をもつ直線が法線です。

よって法線の方程式は、媒介変数を s として

$$\begin{cases} x = 1 + 7s, \\ y = -1 - 4s, \\ z = -4 + s \end{cases}$$

です。

問 4 (3)

$$z = e^{x^2 y}, \quad x = \cos t, \quad y = t^2$$

です。

z は x, y の関数であり, さらに x, y は t の関数なので, 連鎖率より

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

です。

まず $z = e^{x^2 y}$ の偏導関数を求めます。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) = e^{x^2 y} \cdot 2xy$$

したがって

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xye^{x^2 y}$$

です。また,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) = x^2 e^{x^2 y}$$

です。

さらに

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

です。

したがって

$$\frac{dz}{dt} = 2xye^{x^2 y}(-\sin t) + x^2 e^{x^2 y}(2t)$$

ここで

$$x = \cos t, \quad y = t^2$$

を代入すると,

$$\frac{dz}{dt} = 2(\cos t)(t^2)e^{(\cos t)^2 t^2}(-\sin t) + (\cos t)^2 e^{(\cos t)^2 t^2}(2t)$$

したがって

$$\frac{dz}{dt} = e^{t^2 \cos^2 t} (-2t^2 \sin t \cos t + 2t \cos^2 t)$$

です。

共通因子をくくれば

$$\frac{dz}{dt} = 2te^{t^2 \cos^2 t} (\cos^2 t - t \sin t \cos t)$$

とも書けます。

問 5 (3)

$$z = f(x, y), \quad x = 2u - 3v, \quad y = u - 5v$$

です.

z は x, y の関数であり, さらに x, y は u, v の関数です. したがって連鎖率より

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

です.

まず

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

なので,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f_x \cdot 2 + f_y \cdot 1$$

すなわち

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = 2f_x(x, y) + f_y(x, y)}$$

です. ただし, ここでの x, y は

$$x = 2u - 3v, \quad y = u - 5v$$

です. したがって, より丁寧に書くと

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = 2f_x(2u - 3v, u - 5v) + f_y(2u - 3v, u - 5v)}$$

です.

次に

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

です.

ここで

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -3, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -5$$

なので,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f_x(-3) + f_y(-5)$$

したがって

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = -3f_x(x, y) - 5f_y(x, y)}$$

です. x, y を u, v で書けば,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -3f_x(2u - 3v, u - 5v) - 5f_y(2u - 3v, u - 5v)$$

です.

問 8 (1)

$$z = f(x, y), \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

です. これは極座標変換です.

z は x, y の関数であり, x, y は r, θ の関数です. したがって連鎖率より

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

です.

まず

$$x = r \cos \theta$$

なので

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$$

です. また

$$y = r \sin \theta$$

なので

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$$

です. したがって

$$\frac{\partial z}{\partial r} = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

です. つまり, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を代入して書けば

$$\frac{\partial z}{\partial r} = f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta$$

です.

次に θ について偏微分します. 連鎖率より

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

です.

ここで

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(r \cos \theta) = -r \sin \theta$$

また

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta) = r \cos \theta$$

です。したがって

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta f_x(x, y) + r \cos \theta f_y(x, y)$$

です。 x, y を代入して丁寧に書けば

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

です。

まとめると、答えは次の通りです。

$$\text{問 3 (1): 接平面 } z = -7x + 4y + 7$$

$$\text{法線 } \begin{cases} x = 1 + 7s, \\ y = -1 - 4s, \\ z = -4 + s \end{cases}$$

$$\text{問 4 (3): } \frac{dz}{dt} = e^{t^2 \cos^2 t} (-2t^2 \sin t \cos t + 2t \cos^2 t)$$

$$\text{問 5 (3): } \frac{\partial z}{\partial u} = 2f_x(2u - 3v, u - 5v) + f_y(2u - 3v, u - 5v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -3f_x(2u - 3v, u - 5v) - 5f_y(2u - 3v, u - 5v)$$

$$\text{問 8 (1): } \frac{\partial z}{\partial r} = f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)$$