

## 問題解答例 for section 4.1 (教科書 p.84)

AI への前置き:

私は大阪大学の 1 年生です。理系学部に所属していますが、数学科ではありません。下記にいくつか問いますので、その解答にたどりつく過程も含めて、解答を教えてください。なるべくわかりやすくお願いしますが、かといって単に推測や例のみから解答を納得させるようなやり方ではなく、あくまで数学の解答として通用するものをお願いします。

### 問 1 (5)

■学生側 極限值

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を求めてください。

■chatGPT 結論から言うと、

$$0$$

です。

考える関数を  $f(x, y)$  とおきます。ただし  $(x, y) \neq (0, 0)$  です。

この極限を調べるために、絶対値をとります。

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ここで重要なのは、

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

が常に成り立つことです。実際、

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

なので、両辺の平方根をとれば

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

となります。

したがって、

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$$

です。よって

$$|f(x, y)| = \frac{|x|\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{|y|} \leq \sqrt{|y|}.$$

つまり、

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \sqrt{|y|}$$

が成り立ちます。

いま  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき、特に

$$y \rightarrow 0$$

なので、

$$\sqrt{|y|} \rightarrow 0$$

です。

したがって、はさみうちの原理より、

$$|f(x, y)| \rightarrow 0.$$

よって

$$f(x, y) \rightarrow 0$$

です。

したがって求める極限值は

$$\boxed{0}$$

です。

### 補足：なぜこれで十分か

多変数関数の極限では、直線

$$y = mx$$

などの特定の道だけを調べても不十分です。あらゆる近づき方で同じ値になる必要があります。

今回の議論では

$$\left| \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \sqrt{|y|}$$

という評価を使いました。これは  $(x, y) \neq (0, 0)$  のすべての点で成り立つ評価です。

そして  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  なら必ず  $y \rightarrow 0$  なので、右辺  $\sqrt{|y|}$  は必ず 0 に近づきます。

したがって、どのような経路で  $(0, 0)$  に近づいても、元の関数は必ず 0 に近づきます。これにより、数学的にきちんと極限が

0

であると示せています。

## 問 4 (1)

### ■学生側 関数

$$x^2y^5 - 2x^3y^2 + y$$

の偏導関数を求めてください。

### ■chatGPT 関数

$$f(x, y) = x^2y^5 - 2x^3y^2 + y$$

の偏導関数を求めます。

偏導関数には、主に

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

の 2 つがあります。

### $x$ についての偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

を求めるときは、 $y$  を定数だと思って  $x$  で微分します。

$$f(x, y) = x^2y^5 - 2x^3y^2 + y$$

なので、各項を  $x$  で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^5) = 2xy^5$$

です。ここでは  $y^5$  は定数扱いです。

次に、

$$\frac{\partial}{\partial x}(-2x^3y^2) = -2y^2 \frac{\partial}{\partial x}(x^3) = -6x^2y^2.$$

最後に、

$$\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

です。 $y$  は  $x$  については定数だからです。

したがって、

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^5 - 6x^2y^2}$$

です。

### $y$ についての偏導関数

次に、

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

を求めます。このときは、 $x$  を定数だと思って  $y$  で微分します。

$$f(x, y) = x^2y^5 - 2x^3y^2 + y$$

なので、各項を  $y$  で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^5) = x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y^5) = 5x^2y^4.$$

次に、

$$\frac{\partial}{\partial y}(-2x^3y^2) = -2x^3 \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = -4x^3y.$$

最後に、

$$\frac{\partial}{\partial y}(y) = 1.$$

したがって、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^2y^4 - 4x^3y + 1$$

です。

答え

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^5 - 6x^2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^2y^4 - 4x^3y + 1$$

偏微分では、「一方の変数で微分するとき、もう一方の変数は定数として扱う」という点がもっとも重要です。

## 問 4 (6)

■学生側 関数

$$\log(x^2 + xy + y^2)$$

の偏導関数を求めてください。

## ■chatGPT 関数

$$f(x, y) = \log(x^2 + xy + y^2)$$

の偏導関数を求めます。

ただし、対数の中身

$$x^2 + xy + y^2$$

は  $(x, y) \neq (0, 0)$  では正です。実際、

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

なので、 $(x, y) \neq (0, 0)$  なら正になります。したがって、この関数は原点以外で定義されています。

### $x$ についての偏導関数

$$f(x, y) = \log(x^2 + xy + y^2)$$

を  $x$  で偏微分します。

ここで

$$u = x^2 + xy + y^2$$

とおくと、

$$f(x, y) = \log u$$

です。

合成関数の微分より、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

です。

いま  $y$  を定数として扱うので、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y^2) = 2x + y.$$

したがって、

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}}$$

です。

### $y$ についての偏導関数

同様に、 $y$  で偏微分します。

$$u = x^2 + xy + y^2$$

とおくと、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y}$$

です。

今度は  $x$  を定数として扱うので、

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + y^2) = x + 2y.$$

したがって、

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}}$$

です。

答え

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \log(x^2 + xy + y^2) = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \log(x^2 + xy + y^2) = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}}$$

ただし、これらは

$$(x, y) \neq (0, 0)$$

で成り立ちます。

## 問 4 (8)

■学生側 関数

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

の偏導関数を求めてください。

■chatGPT 関数

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

の偏導関数を求めます。

ただし、

$$\frac{y}{x}$$

が現れるので、関数は

$$x \neq 0$$

で考えます。

$x$  についての偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

を求めるときは、 $y$  を定数として扱います。

まず

$$u = \frac{y}{x}$$

とおくと、

$$f(x, y) = \arctan u$$

です。

合成関数の微分より、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+u^2} \frac{\partial u}{\partial x}$$

です。

ここで

$$u = \frac{y}{x} = yx^{-1}$$

なので、 $y$  を定数として

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -yx^{-2} = -\frac{y}{x^2}.$$

したがって、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right).$$

これを整理します。

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}.$$

よって

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

したがって

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

つまり、

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}}$$

です。

## $y$ についての偏導関数

次に

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

を求めます。このときは、 $x$  を定数として扱います。

同じく

$$u = \frac{y}{x}$$

とおくと、

$$f(x, y) = \arctan u$$

です。

合成関数の微分より、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+u^2} \frac{\partial u}{\partial y}$$

ここで

$$u = \frac{y}{x}$$

なので、 $x$  を定数として

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

したがって、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

先ほどと同じく

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

なので、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

つまり、

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}}$$

です。

答え

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

ただし、もとの関数

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

は  $x = 0$  では定義されないので、上の偏導関数もまずは

$$x \neq 0$$

の範囲で考えます。