

問題解答例 for section 2.4 (教科書 p.53)

AI への前置き:

私は大阪大学の 1 年生です。理系学部に所属していますが、数学科ではありません。下記にいくつか問いますので、その解答にたどりつく過程も含めて、解答を教えてください。なお、なるべくわかりやすくお願いしますが、かといって単に推測や例のみから解答を納得させるようなやり方ではなく、あくまで数学の解答として通用するものをお願いします。

■学生側 標題: 問 1 (3)

関数 $x \sin(x)$ の有限マクローリン展開を、4 階微分まで使った厳密な形で、つまり、剰余項をきちんと表現した形で書いてください。

■chatGPT 関数

$$f(x) = x \sin x$$

の 4 階までの有限マクローリン展開を求めます。

マクローリン展開の形は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + R_4(x)$$

です。ここで $R_4(x)$ は剰余項です。

まず微分を計算します。

$$f(x) = x \sin x$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -3 \sin x - x \cos x$$

$$f^{(4)}(x) = -4 \cos x + x \sin x$$

したがって、 $x = 0$ を代入すると、

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 2$$

$$f^{(3)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(0) = -4$$

です。

よって、

$$x \sin x = 0 + 0 \cdot x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{-4}{4!}x^4 + R_4(x)$$

となります。整理すると、

$$x \sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + R_4(x)$$

です。

剰余項をラグランジュの形で書くと、

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!} x^5$$

ただし、 θ は $0 < \theta < 1$ を満たす数です。

ここで

$$f^{(5)}(x) = 5 \sin x + x \cos x$$

なので、

$$R_4(x) = \frac{5 \sin(\theta x) + \theta x \cos(\theta x)}{5!} x^5$$

すなわち

$$R_4(x) = \frac{5 \sin(\theta x) + \theta x \cos(\theta x)}{120} x^5$$

です。

したがって、求める有限マクローリン展開は

$$x \sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{5 \sin(\theta x) + \theta x \cos(\theta x)}{120} x^5$$

ただし、

$$0 < \theta < 1$$

です。

なお、積分形の剰余項を使えば、次のようにも厳密に書けます。

$$x \sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{4!} \int_0^x (x-t)^4 \{5 \sin t + t \cos t\} dt$$

こちらも剰余項をきちんと表した厳密な形です。

■学生側 それは5階微分まで使ってるでしょ、というツッコミ。

すみません、剰余項が4階微分です。

■chatGPT おっしゃる通りです。先ほどの回答では、4次の Taylor 多項式まで書いたため、剰余項が5階微分を含む形になっていました。

今回の意図が

「剰余項に4階微分が出てくる形」

であれば、使うべき形は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$$

です。ただし

$$0 < \theta < 1$$

です。

ここで

$$f(x) = x \sin x$$

とします。

微分を計算すると、

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -3 \sin x - x \cos x$$

$$f^{(4)}(x) = -4 \cos x + x \sin x$$

です。

したがって、

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 2$$

$$f^{(3)}(0) = 0$$

です。

よって、剰余項を 4 階微分で表す有限マクローリン展開は

$$x \sin x = 0 + 0 \cdot x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$$

すなわち

$$x \sin x = x^2 + \frac{f^{(4)}(\theta x)}{24}x^4$$

です。

さらに

$$f^{(4)}(x) = -4 \cos x + x \sin x$$

なので、

$$f^{(4)}(\theta x) = -4 \cos(\theta x) + \theta x \sin(\theta x)$$

です。したがって最終的に

$$x \sin x = x^2 + \frac{-4 \cos(\theta x) + \theta x \sin(\theta x)}{24}x^4$$

ただし

$$0 < \theta < 1$$

です。

補足すると、これは

$$x \sin x = x^2 + \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$$

という形であり、4 階微分までを使った厳密な有限マクローリン展開です。

一方、

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + \dots$$

のように x^4 の係数まで確定して書く場合には、その後の剰余項には通常 5 階微分が現れます。したがって、今回の指定では

$$x \sin x = x^2 + \frac{-4 \cos(\theta x) + \theta x \sin(\theta x)}{24}x^4$$

が適切です。

■学生側 問 2 (4)

関数 $\log(1+x)$ の有限マクローリン展開を、 n 階微分まで使った厳密な形で書いてください。この際、 n は一般の正整数で、剰余項に n 階微分が用いられるようにしてください。

■chatGPT

$$f(x) = \log(1+x)$$

について、剰余項に n 階微分が出てくる形で有限マクローリン展開を書きます。

この場合、Taylor の定理より

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

と書けます。ただし

$$0 < \theta < 1$$

です。

ここで

$$f(x) = \log(1+x)$$

とします。まず導関数を調べます。

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

となります。したがって一般に、 $k \geq 1$ に対して

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

です。

よって $x=0$ を代入すると、

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

です。したがって

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

となります。

したがって、剰余項に n 階微分を用いる有限マクローリン展開は

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$$

です。

さらに

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

なので、

$$f^{(n)}(\theta x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

です。したがって剰余項を具体的に書くと、

$$\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!(1+\theta x)^n} x^n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

です。

よって最終的に

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

ただし

$$0 < \theta < 1$$

です。

和の記号で書けば、

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

です。

これは実数範囲では、少なくとも

$$x > -1$$

で考えればよいです。特に $x = 0$ の近くでは問題なく成り立ちます。

■学生側 問 4 (2)

極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x \sin(x)}$ を漸近展開を用いて求めてください。この際、なるべく計算過程を詳しく教えてください。

■chatGPT 結論から言うと、

$$\frac{3}{2}$$

です。以下、漸近展開を使って丁寧に計算します。

まず、 $x \rightarrow 0$ のときの基本的な展開を使います。

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3) \quad (t \rightarrow 0)$$

です。ここで $t = x^2$ とすると、

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6)$$

となります。

一方、

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)$$

なので、

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$$

です。

したがって、分子は

$$e^{x^2} - \cos x$$

なので、

$$e^{x^2} - \cos x = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right)$$

です。これを整理すると、

$$e^{x^2} - \cos x = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^6)$$

よって

$$e^{x^2} - \cos x = \frac{3}{2}x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right)x^4 + O(x^6)$$

です。

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{12}{24} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24}$$

なので、

$$e^{x^2} - \cos x = \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + O(x^6)$$

となります。

次に分母を展開します。

$$x \sin x$$

について、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)$$

すなわち

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$$

です。したがって、

$$x \sin x = x \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) \right)$$

なので、

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + O(x^8)$$

です。極限を求めるだけなら先頭の項までで十分なので、

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + O(x^6)$$

としてよいです。

したがって、元の分数は

$$\frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + O(x^6)}{x^2 - \frac{x^4}{6} + O(x^6)}$$

です。

ここで分子・分母に共通して x^2 が現れているので、 x^2 でくくります。

分子は

$$\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + O(x^6) = x^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{11}{24}x^2 + O(x^4) \right)$$

分母は

$$x^2 - \frac{x^4}{6} + O(x^6) = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4) \right)$$

です。したがって、

$$\frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x} = \frac{x^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{11}{24}x^2 + O(x^4) \right)}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4) \right)}$$

となります。 $x \neq 0$ として x^2 を約分すると、

$$\frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{11}{24}x^2 + O(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)}$$

です。

ここで $x \rightarrow 0$ とすると、分子は

$$\frac{3}{2}$$

に近づき、分母は

$$1$$

に近づきます。したがって、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2} + \frac{11}{24}x^2 + O(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)} = \frac{3}{2}$$

です。

よって、

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x} = \frac{3}{2}}$$

です。