

## 問題解答例 for section 2.3 (教科書 p.46)

AI への前置き:

私は大阪大学の 1 年生です。理系学部に所属していますが、数学科ではありません。下記にいくつか問いますので、その解答にたどりつく過程も含めて、解答を教えてください。なお、なるべくわかりやすくお願いしますが、かといって単に推測や例のみから解答を納得させるようなやり方ではなく、あくまで数学の解答として通用するものをお願いします。

### 問 1 (1). $y(x) = \log(1 - x)$ の $n$ 階導関数

#### 学生側

$n \geq 1$  として、関数  $y(x) = \log(1 - x)$  の  $n$  階導関数を求めてください。

#### chatGPT

関数  $y(x) = \log(1 - x)$  を考えます。実数値関数として考えるなら、定義域は  $1 - x > 0$  なので、 $x < 1$  です。求めたいのは、 $n \geq 1$  に対する  $n$  階導関数  $y^{(n)}(x)$  です。

まず、低い階数で計算して規則を見ます。

$$y(x) = \log(1 - x)$$

なので、合成関数の微分により

$$y'(x) = \frac{1}{1-x} \cdot (-1)$$

したがって

$$y'(x) = -\frac{1}{1-x}$$

です。

次に 2 階導関数を求めます。

$$y'(x) = -(1-x)^{-1}$$

なので、

$$y''(x) = -\frac{d}{dx}(1-x)^{-1}$$

ここで

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = (1-x)^{-2}$$

だから、

$$y''(x) = -(1-x)^{-2} = -\frac{1}{(1-x)^2}$$

です。

さらに 3 階導関数は

$$y''(x) = -(1-x)^{-2}$$

より、

$$y'''(x) = -\frac{d}{dx}(1-x)^{-2}$$

ここで

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{-2} = 2(1-x)^{-3}$$

だから、

$$y'''(x) = -2(1-x)^{-3} = -\frac{2}{(1-x)^3}$$

です。

ここまですべてを並べると、

$$y'(x) = -\frac{1}{1-x}$$

$$y''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'''(x) = -\frac{2}{(1-x)^3}$$

となります。係数は 1, 1, 2, ... となっており、これは 0!, 1!, 2!, ... と見るのが自然です。

したがって、予想される公式は

$$y^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

です。これを**数学的に確認**します。まず  $n = 1$  のとき、

$$y'(x) = -\frac{1}{1-x}$$

です。一方、公式の右辺は

$$-\frac{(1-1)!}{(1-x)^1} = -\frac{0!}{1-x} = -\frac{1}{1-x}$$

なので、確かに成り立ちます。

次に、ある  $n \geq 1$  で

$$y^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

が成り立っていると仮定します。

この両辺を  $x$  で微分すると、

$$y^{(n+1)}(x) = -(n-1)! \frac{d}{dx}(1-x)^{-n}$$

です。  
ここで

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{-n} = n(1-x)^{-n-1}$$

なので、

$$y^{(n+1)}(x) = -(n-1)!n(1-x)^{-n-1}$$

となります。したがって

$$y^{(n+1)}(x) = -\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

です。  
これは、公式で  $n$  を  $n+1$  に置き換えたものになっています。  
よって**数学的帰納法**により、すべての  $n \geq 1$  に対して

$$y^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

が成り立ちます。

## 問 1 (5). $y(x) = 3^x(x^2 + x)$ の $n$ 階導関数

### 学生側

同様に、 $y(x) = 3^x(x^2 + x)$  の  $n$  階導関数を求めてください。

### chatGPT

ここでは  $f(x) = 3^x$ ,  $g(x) = x^2 + x$  とおきます。すると  $y(x) = f(x)g(x)$  です。  
積の  $n$  階微分には、ライプニッツの公式

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

を使います。  
まず、それぞれの導関数を調べます。 $f(x) = 3^x$  については、

$$f'(x) = 3^x \log 3$$

なので、一般に

$$f^{(m)}(x) = (\log 3)^m 3^x$$

です。一方、 $g(x) = x^2 + x$  については、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + 1, \\ g''(x) &= 2, \\ g^{(k)}(x) &= 0 \quad (k \geq 3) \end{aligned}$$

です。したがって、ライプニッツの公式では  $k = 0, 1, 2$  の項だけが残ります。

よって、 $n \geq 2$  のとき、

$$y^{(n)}(x) = \binom{n}{0} f^{(n)}(x)g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x)g'(x) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x)g''(x)$$

です。それぞれ代入すると、

$$y^{(n)}(x) = (\log 3)^n 3^x (x^2 + x) + n(\log 3)^{n-1} 3^x (2x + 1) + \frac{n(n-1)}{2} (\log 3)^{n-2} 3^x \cdot 2$$

となります。最後の項では 2 が約分されるので、

$$y^{(n)}(x) = 3^x \{ (\log 3)^n (x^2 + x) + n(\log 3)^{n-1} (2x + 1) + n(n-1)(\log 3)^{n-2} \}$$

です。したがって、 $n \geq 2$  に対して

$$y^{(n)}(x) = 3^x [(\log 3)^n (x^2 + x) + n(\log 3)^{n-1} (2x + 1) + n(n-1)(\log 3)^{n-2}]$$

です。なお、 $n = 1$  の場合は最後の項は出てきません。直接計算すると、

$$y'(x) = (3^x)'(x^2 + x) + 3^x(x^2 + x)'$$

より、

$$y'(x) = 3^x(\log 3)(x^2 + x) + 3^x(2x + 1)$$

であるので、したがって

$$y'(x) = 3^x [(\log 3)(x^2 + x) + (2x + 1)]$$

となり、上の  $n \geq 2$  の公式に  $n = 1$  を代入して、最後の項を「存在しない項」として無視すれば、同じ形で理解できます。

## 問 2 (1). $y(x) = 2x^2\sqrt{x} - 5x^2$ の極値、凹凸、変曲点、概形

### 学生側

曲線  $y(x) = 2x^2\sqrt{x} - 5x^2$  の極値、凹凸、変曲点を調べて、概形を描いてください。

### chatGPT 補足

定義域が  $x \geq 0$  である点が少し重要です。通常の極値判定に加えて、端点  $x = 0$  の扱いも明示して整理します。

### chatGPT

考える関数は  $y(x) = 2x^2\sqrt{x} - 5x^2$  です。まず  $\sqrt{x}$  を含むので、実数値関数としての定義域は  $x \geq 0$  です。また、 $x^2\sqrt{x} = x^{5/2}$  なので、 $y(x) = 2x^{5/2} - 5x^2$  と書けます。

## 1. 極値を調べる

まず導関数を求めます。

$$y'(x) = 2 \cdot \frac{5}{2}x^{3/2} - 10x = 5x^{3/2} - 10x = 5x(\sqrt{x} - 2)$$

です。したがって、 $x > 0$  で  $y'(x) = 0$  となるのは  $5x(\sqrt{x} - 2) = 0$  より、 $x = 4$  です。

なお、端点  $x = 0$  も定義域に含まれるので、あとで別に確認します。

次に、 $x > 0$  において、導関数の符号を調べます。 $x > 0$  では  $5x > 0$  なので、符号は  $\sqrt{x} - 2$  で決まります。 $0 < x < 4$  のとき  $y'(x) < 0$  で、 $x > 4$  のとき  $y'(x) > 0$  です。したがって、 $0 < x < 4$  で減少し、 $x > 4$  で増加します。よって、 $x = 4$  で極小になります。その値は  $y(4) = 2 \cdot 4^2\sqrt{4} - 5 \cdot 4^2 = 2 \cdot 16 \cdot 2 - 5 \cdot 16 = -16$  です。したがって、

$x = 4$ で極小値 $-16$
--------------------

です。

端点  $x = 0$  についても見ておきます。 $y(0) = 0$  です。また、 $y(x) = x^2(2\sqrt{x} - 5)$  なので、 $x > 0$  が十分小さいとき、 $2\sqrt{x} - 5 < 0$  であることから、 $y(x) < 0$  となります。つまり、 $x = 0$  のすぐ右側ではグラフは 0 より下に下がります。

したがって、定義域  $x \geq 0$  の中で考えるなら、 $x = 0$  は端点での局所最大点であるとみなすこともできますが、通常の微分による極値判定では、端点は「極値」として扱わないことも多いでしょう。その場合は、内部点での極値は  $x = 4$  の極小値  $-16$  のみです。

## 2. 凹凸を調べる

次に 2 階導関数を求めます。 $y'(x) = 5x^{3/2} - 10x$  なので、

$$y''(x) = 5 \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} - 10 = \frac{15}{2}\sqrt{x} - 10$$

です。凹凸が変わる可能性がある点は  $y''(x) = 0$  となる点で、 $x = 16/9$  です。

$y''(x)$  の符号を調べます。 $0 < x < 16/9$  では  $\sqrt{x} < 4/3$  となり、 $y''(x) < 0$  です。したがって、この範囲ではグラフは上に凸、つまり下向きに曲がっています。

一方、 $x > 16/9$  では  $y''(x) > 0$  です。したがって、この範囲ではグラフは下に凸、つまり上向きに曲がっています。

よって、

- $0 < x < 16/9$  で上に凸、
- $16/9 < x$  で下に凸

です。

## 3. 変曲点を求める

$x = \frac{16}{9}$  で  $y''(x)$  の符号が  $-$  から  $+$  に変わるので、ここは変曲点です。そのときの  $y$  座標を求めます。 $y(x) = 2x^{5/2} - 5x^2$  に  $x = \frac{16}{9}$  を代入します。

まず、

$$\left(\frac{16}{9}\right)^{5/2} = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{256}{81} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1024}{243}$$

です。したがって、 $y\left(\frac{16}{9}\right) = -\frac{1792}{243}$  です。  
よって変曲点は

$$\left(\frac{16}{9}, -\frac{1792}{243}\right)$$

です。小数で見ると、

$$\frac{16}{9} \approx 1.78, \quad -\frac{1792}{243} \approx -7.37$$

です。

#### 4. 増減表と凹凸表

まとめると、重要な点は

$$x = 0, \quad x = \frac{16}{9}, \quad x = 4$$

です。

$x$	0	$\frac{16}{9}$	4	$\infty$		
$y'(x)$	0	-	-	0	+	
$y''(x)$	0	-	0	+	+	
$y(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1792}{243}$	$\searrow$	-16	$\nearrow$

したがって、

$$x = 0$$

からグラフは減少し始め、

$$x = \frac{16}{9}$$

で曲がり方が変わり、

$$x = 4$$

で最小になり、その後は増加します。

#### 5. $x$ 軸との交点

概形を描くために、 $x$  軸との交点も調べておくと便利です。

$$y = x^2(2\sqrt{x} - 5)$$

なので、

$$y = 0$$

となるのは

$$x^2 = 0$$

または

$$2\sqrt{x} - 5 = 0$$

のときです。  
したがって、

$$x = 0$$

または

$$\sqrt{x} = \frac{5}{2}$$

より、

$$x = \frac{25}{4}$$

です。  
つまり、 $x$  軸との交点は

$$\left(0, 0\right), \left(\frac{25}{4}, 0\right)$$

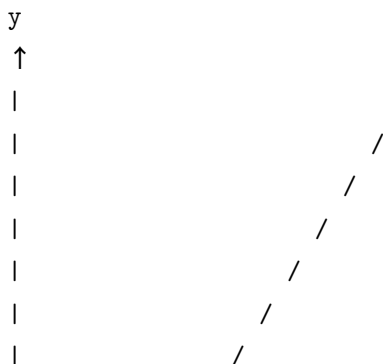
です。

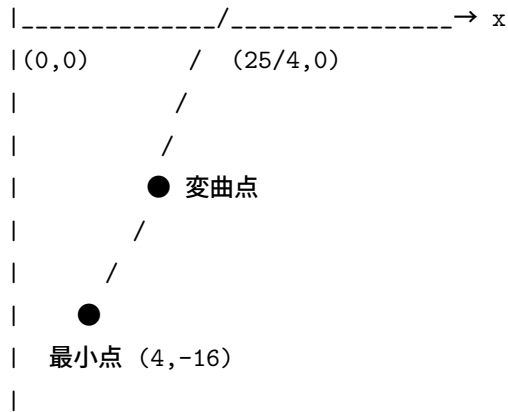
## 6. 概形

以上より、グラフの概形は次のようになります。

- 定義域は  $x \geq 0$
- $x = 0$  で  $y = 0$
- そこから減少する
- $x = \frac{16}{9}$  で変曲する
- $x = 4$  で最小値  $-16$  をとる
- その後は増加する
- $x = \frac{25}{4}$  で再び  $x$  軸と交わる
- $x \rightarrow \infty$  で  $y \rightarrow \infty$

簡単な模式図で描くと、次のような形です。





ただし、この模式図では位置関係だけを強調しています。正確な特徴は

$$\text{変曲点 } \left( \frac{16}{9}, -\frac{1792}{243} \right)$$

$$\text{極小点 } (4, -16)$$

$$x \text{ 軸との交点 } (0, 0), \left( \frac{25}{4}, 0 \right)$$

です。

## おかしいのでツッコミ

### 学生側

その模式図は間違っていないですか？

### chatGPT

はい、前回の模式図は**かなり不正確**でした。特に、曲線の位置関係と曲がり方がうまく反映されていませんでした。失礼しました。

正しくは、重要な点の  $x$  座標の順番は

$$0 < \frac{16}{9} < 4 < \frac{25}{4}$$

です。

つまり、左から順に

$$(0, 0)$$

$$\left( \frac{16}{9}, -\frac{1792}{243} \right)$$

$$(4, -16)$$

$$\left( \frac{25}{4}, 0 \right)$$

が現れます。  
小数で書くと、

$$\frac{16}{9} \approx 1.78, \quad 4, \quad \frac{25}{4} = 6.25$$

です。  
したがって、グラフは次のような流れになります。

$$(0, 0)$$

から出発し、まず下に向かって減少します。  
その途中の

$$x = \frac{16}{9}$$

で変曲します。  
その後もまだ減少を続け、

$$x = 4$$

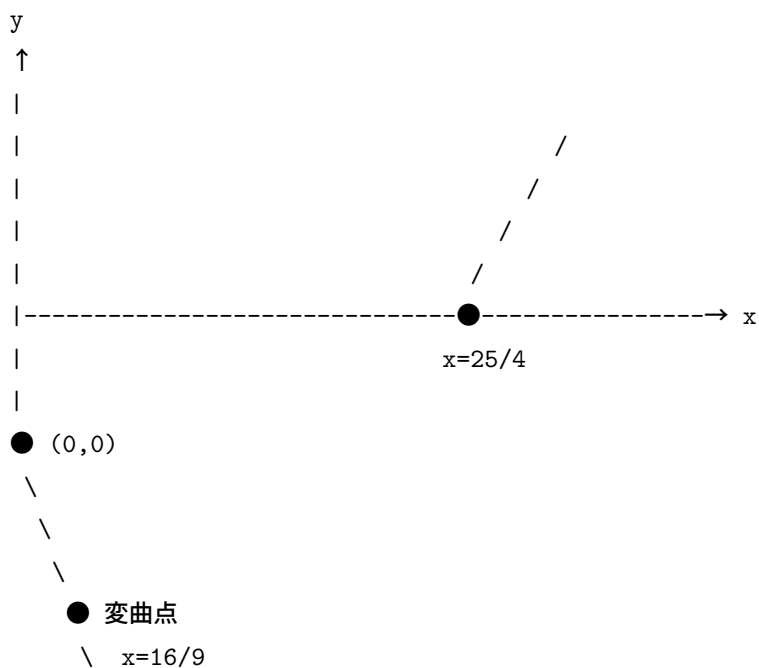
で最小値

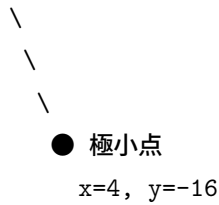
$$-16$$

をとります。  
その後は増加し、

$$x = \frac{25}{4}$$

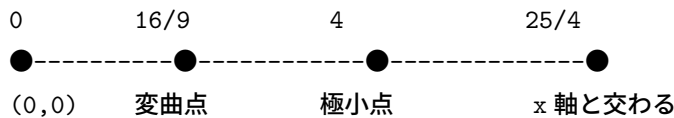
で再び  $x$  軸と交わります。  
より正確な模式図は、例えば次のようになります。





ただし、この図でも縦横比は正確ではありません。大事なのは、次の関係です。

$x$  の順番：



増減と凹凸を合わせると、

$$0 < x < \frac{16}{9}$$

では

$$y' < 0, \quad y'' < 0$$

なので、減少しながら上に凸です。

$$\frac{16}{9} < x < 4$$

では

$$y' < 0, \quad y'' > 0$$

なので、減少しながら下に凸です。

$$x > 4$$

では

$$y' > 0, \quad y'' > 0$$

なので、増加しながら下に凸です。

したがって、まとめると

$(0, 0)$  から下がり、変曲点を通して、 $(4, -16)$  で最小になり、その後上昇して  $\left(\frac{25}{4}, 0\right)$  を通る

という形です。前回の模式図は、この「変曲点が極小点より左にあり、 $x$  軸との再交点は極小点より右にある」という位置関係を十分に表せていませんでした。

**まだやや心配なので、Python によるグラフ描画を要求する**

**学生側**

Python を使って良いので、この曲線のグラフを、 $0 \leq x \leq 7$  ぐらいの範囲で描いてください。

## Python による描画

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#  $y = 2x^2\sqrt{x} - 5x^2 = 2x^{5/2} - 5x^2$ 
x = np.linspace(0, 7, 800)
y = 2 * x**2 * np.sqrt(x) - 5 * x**2

# 特徴点
x_inf = 16/9
y_inf = 2 * x_inf**2 * np.sqrt(x_inf) - 5 * x_inf**2

x_min = 4
y_min = 2 * x_min**2 * np.sqrt(x_min) - 5 * x_min**2

x_zero2 = 25/4
y_zero2 = 0

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 5))

ax.plot(x, y, label=r"$y=2x^2\sqrt{x}-5x^2$")
ax.axhline(0, linewidth=1)
ax.axvline(0, linewidth=1)

ax.scatter([0, x_inf, x_min, x_zero2], [0, y_inf, y_min, y_zero2])
ax.annotate(r"$(0,0)$", xy=(0, 0), xytext=(0.25, 2),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->"))
ax.annotate(r"inflection $\left(\frac{16}{9}, -\frac{1792}{243}\right)$",
            xy=(x_inf, y_inf), xytext=(2.2, -5),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->"))
ax.annotate(r"minimum $(4, -16)$",
            xy=(x_min, y_min), xytext=(4.5, -14),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->"))
ax.annotate(r"$\left(\frac{25}{4}, 0\right)$",
            xy=(x_zero2, y_zero2), xytext=(5.0, 5),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->"))

ax.set_xlim(0, 7)
ax.set_ylim(-20, 20)
ax.set_xlabel(r"$x$")
ax.set_ylabel(r"$y$")
ax.set_title(r"Graph of $y=2x^2\sqrt{x}-5x^2$ on $0\leq x\leq 7$")
```

```

ax.grid(True)
ax.legend()

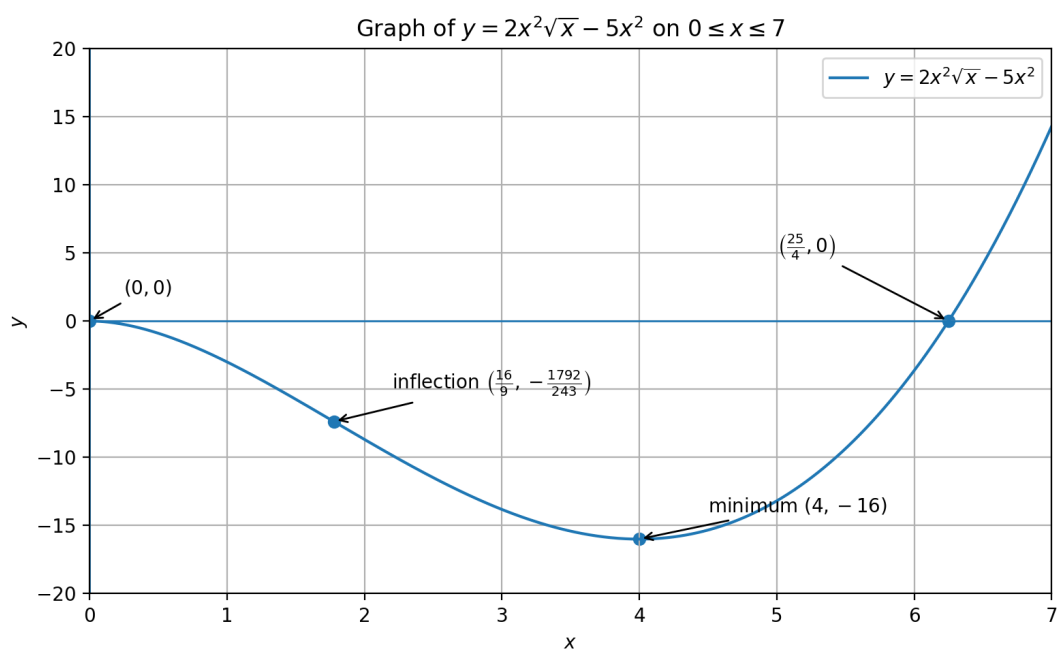
plt.tight_layout()

path = "/mnt/data/curve_2x2sqrtx_minus_5x2.png"
plt.savefig(path, dpi=200)
plt.show()

```

path

出力されたグラフ画像は次の通りです。



chatGPT

描画しました。範囲は

$$0 \leq x \leq 7$$

です。

グラフを見ると、先ほど整理した通り、

$$(0, 0)$$

から減少し、

$$\left(\frac{16}{9}, -\frac{1792}{243}\right)$$

で変曲し、

$$(4, -16)$$

で極小値をとり、その後増加して

$$\left(\frac{25}{4}, 0\right)$$

で  $x$  軸と交わる様子が確認できます。

## 問 5 (3). Newton 法による $x^3 - 3 = 0$ の近似解

### 学生側

方程式  $x^3 - 3 = 0$  の解で  $1 \leq x \leq 2$  の範囲にあるものの近似解を、Newton 法を 4 回適用して求めてください。なお、Newton 法の初期値は  $x = 1.5$  としてほしいのですが、それだと解の範囲を外れてしまう場合は他の初期値を試してください。

### chatGPT

方程式

$$x^3 - 3 = 0$$

の解を Newton 法で近似します。

考える関数を

$$f(x) = x^3 - 3$$

とおきます。すると

$$f'(x) = 3x^2$$

です。

Newton 法は

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

で与えられるので、今回の場合は

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3}{3x_k^2}$$

です。

これを少し整理すると、

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k}{3} + \frac{1}{x_k^2}$$

なので、

$$x_{k+1} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{x_k^2}$$

となります。  
初期値は指定通り

$$x_0 = 1.5$$

とします。

### 1回目

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{x_0^2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 1.5 + \frac{1}{1.5^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2.25} \\ &= 1 + 0.444444 \dots\end{aligned}$$

したがって

$$x_1 = 1.444444444 \dots$$

です。

### 2回目

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{x_1^2} \\ x_1 &= 1.444444444 \dots\end{aligned}$$

を代入すると、

$$x_2 = 1.442252903 \dots$$

です。

### 3回目

$$x_3 = \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{x_2^2}$$

より、

$$x_3 = 1.442249570 \dots$$

です。

## 4 回目

$$x_4 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{x_3^2}$$

より、

$$x_4 = 1.442249570307408\dots$$

です。

したがって、Newton 法を 4 回適用して得られる近似解は

$$x \approx 1.442249570307408$$

です。

なお、この値は

$$1 \leq x \leq 2$$

の範囲内にあります。したがって、初期値

$$x_0 = 1.5$$

をそのまま使って問題ありません。

## 厳密解と高精度な近似値

### 学生側

ちなみにこの方程式の厳密解、もしくは厳密解に近い近似値はいくつですか？

chatGPT

方程式

$$x^3 - 3 = 0$$

は

$$x^3 = 3$$

なので、実数解は

$$x = \sqrt[3]{3}$$

です。

これは厳密解です。

近似値は

$$\sqrt[3]{3} = 1.4422495703074083\dots$$

です。  
したがって、

$$x \approx 1.442249570307408$$

です。  
前回 Newton 法を 4 回適用して得た値

$$x_4 \approx 1.442249570307408$$

は、すでにかなり高精度に厳密解

$$\sqrt[3]{3}$$

に一致しています。