

問題解答例 for section 2.2 (教科書 p.39)

AI への前置き:

私は大阪大学の 1 年生です。理系学部に所属していますが、数学科ではありません。下記にいくつか問いますので、その解答にたどりつく過程も含めて、解答を教えてください。なお、なるべくわかりやすくお願いしますが、かといって単に推測や例のみから解答を納得させるようなやり方ではなく、あくまで数学の解答として通用するものをお願いします。

1 問 2 (1) 最大値・最小値

学生側

関数

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

の最大値、最小値を求めてください。

chatGPT

x を実数全体で考えます。結論から言うと、

最小値は -1 で、 $x = 0$ のときにとる。
最大値は存在しない。
ただし、上限は 1 。

です。

まず式を少し変形します。

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

分子を

$$x^2 - 1 = (x^2 + 1) - 2$$

と見ると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2 + 1) - 2}{x^2 + 1} \\ &= 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

となります。

ここで、任意の実数 x に対して

$$x^2 \geq 0$$

なので、

$$x^2 + 1 \geq 1$$

です。したがって

$$0 < \frac{2}{x^2 + 1} \leq 2$$

となります。

これを

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

に代入して考えると、

$$-1 \leq f(x) < 1$$

がわかります。

実際、左端については $x = 0$ のとき

$$f(0) = \frac{0^2 - 1}{0^2 + 1} = -1$$

なので、最小値は確かに -1 です。

一方で、右端の 1 については、

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

なので、どんな実数 x に対しても

$$\frac{2}{x^2 + 1} > 0$$

です。したがって

$$f(x) < 1$$

であり、 $f(x) = 1$ となる x は存在しません。

しかし、 $|x|$ を大きくすると

$$\frac{2}{x^2 + 1}$$

はどんどん 0 に近づくので、

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

は 1 に近づきます。

つまり、 1 は「限りなく近づけるが、実際には到達しない値」です。したがって最大値は存在しません。

したがって答えは

最小値： -1 ($x = 0$ のとき),
最大値： 存在しない,
上限： 1 .

です。

補足: グラフも見たい

学生側

念の為、Python を使って関数 $f(x)$ のグラフを適切な x の範囲で描いてください。

chatGPT

Python では次のコードを用いました。

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# f(x) = (x^2 - 1) / (x^2 + 1)
x = np.linspace(-10, 10, 2000)
y = (x**2 - 1) / (x**2 + 1)

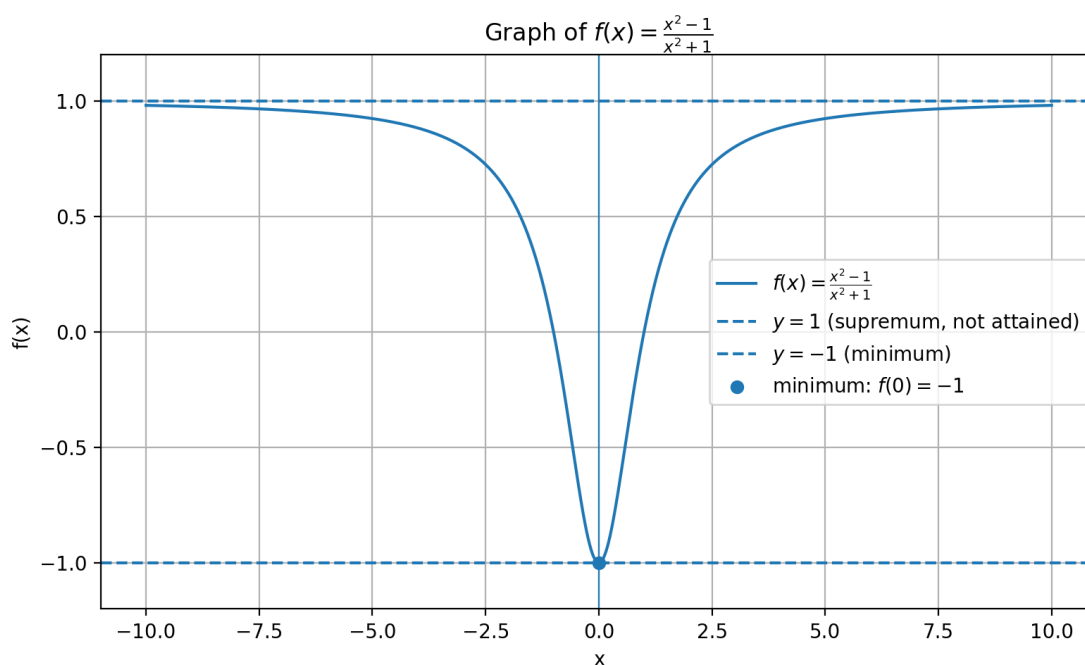
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(x, y, label=r"$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$")
plt.axhline(1, linestyle="--", label=r"$y=1$ (supremum, not attained)")
plt.axhline(-1, linestyle="--", label=r"$y=-1$ (minimum)")
plt.axvline(0, linewidth=0.8)
plt.scatter([0], [-1], zorder=3, label=r"minimum: $f(0)=-1$")

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("f(x)")
plt.title(r"Graph of $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$")
plt.ylim(-1.2, 1.2)
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()

output_path = "/mnt/data/f_graph_clean.png"
plt.savefig(output_path, dpi=200)
plt.show()

```

output_path



図：関数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ のグラフ

グラフを描きました。範囲は

$$-10 \leq x \leq 10$$

です。

図を見ると,

$$x = 0 \text{ で } f(x) = -1$$

となり, ここで最小値をとっています。

一方で, $|x|$ が大きくなると $f(x)$ は 1 に近づきますが, グラフ上でも $y = 1$ には到達していません。したがって, 先ほどの結論

最小値: -1 ,
最大値: 存在しない,
上限: 1

と整合しています。

2 問 3 (1) : 関数増減と極値

学生側

関数

$$y = x^{1/x}$$

の増減と極値を調べ、グラフの概形を描いてください。その後、Python を使って正確なグラフも描いてください。

chatGPT

まず数学的に定義域・導関数・増減を調べ、その結果から概形を説明します。最後に、見やすい範囲を選んで Python でグラフを描きます。

chatGPT

Python では次のコードを用いました。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

# y = x^(1/x), defined for x > 0
x = np.linspace(0.001, 12, 4000)
y = x**(1/x)

e = math.e
ymax = e**(1/e)

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(x, y, label=r"$y=x^{1/x}$")
plt.axhline(1, linestyle="--", label=r"$y=1$")
plt.axvline(e, linestyle="--", label=r"$x=e$")
plt.scatter([e], [ymax], zorder=3, label=rf"maximum $(e,e^{\{1/e\}})\approx({e:.3f},{ymax:.3f})$")
plt.scatter([1], [1], zorder=3, label=r"$ (1,1)$ ")

plt.xlim(0, 12)
plt.ylim(0, 1.6)
```

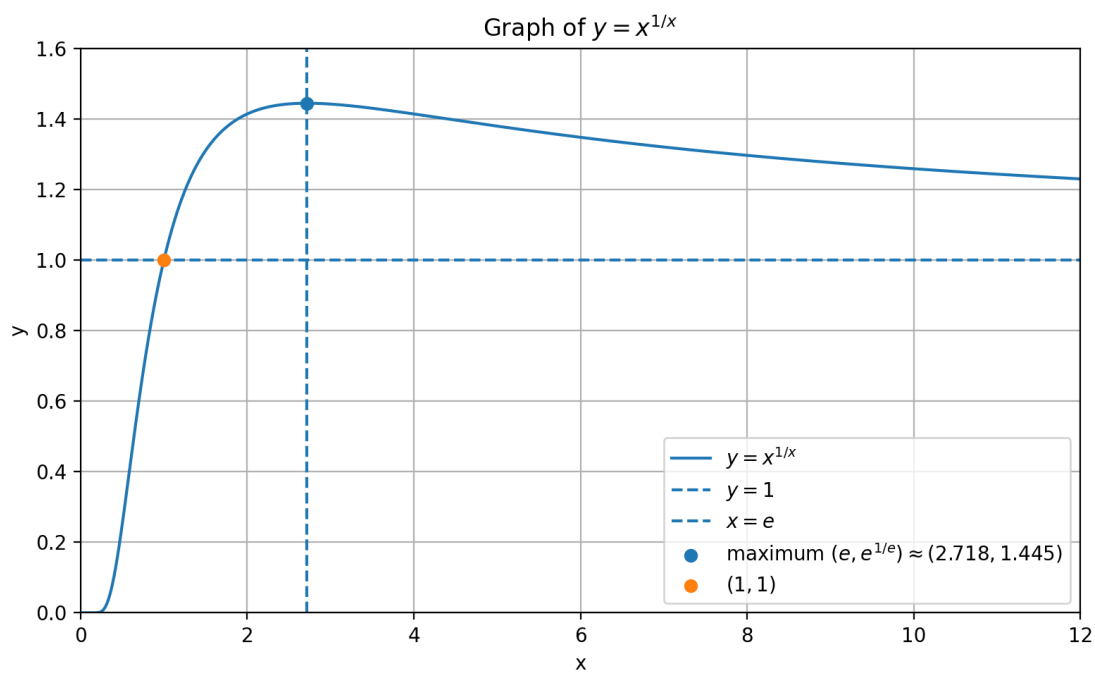
```

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title(r"Graph of  $y=x^{1/x}$ ")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()

output_path = "/mnt/data/x_power_1_over_x_graph.png"
plt.savefig(output_path, dpi=200)
plt.show()

```

output_path



図：関数 $y = x^{1/x}$ のグラフ

chatGPT

関数

$$y = x^{1/x}$$

について調べます。

まず注意すべき点は、実数値関数として普通に扱うなら、定義域は

$$x > 0$$

です。したがって、以下では $x > 0$ で考えます。

1. 対数を取って微分する

この関数はそのまま微分するより、対数を取ると扱いやすくなります。

$$y = x^{1/x}.$$

両辺の自然対数を取ると,

$$\log y = \log(x^{1/x})$$

なので,

$$\log y = \frac{1}{x} \log x,$$

すなわち

$$\log y = \frac{\log x}{x}$$

です。

ここで両辺を x で微分します。

左辺は合成関数の微分により

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{y'}{y}$$

です。

右辺は

$$\frac{\log x}{x}$$

なので, 商の微分または積の微分を使って

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\log x}{x} \right) &= \frac{d}{dx} (x^{-1} \log x) \\ &= -x^{-2} \log x + x^{-1} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1 - \log x}{x^2} \end{aligned}$$

となります。

したがって

$$\frac{y'}{y} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

です。よって

$$y' = y \cdot \frac{1 - \log x}{x^2},$$

すなわち

$$y' = x^{1/x} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2}$$

です。

2. 増減を調べる

ここで, $x > 0$ なので

$$x^{1/x} > 0$$

また

$$x^2 > 0$$

です。

したがって、導関数 y' の符号は

$$1 - \log x$$

の符号だけで決まります。

つまり、

$$1 - \log x > 0$$

なら増加、

$$1 - \log x < 0$$

なら減少です。

境目は

$$1 - \log x = 0$$

すなわち

$$\log x = 1$$

なので、

$$x = e$$

です。

したがって、

$$\begin{array}{ll} 0 < x < e & \text{では増加,} \\ x = e & \text{で極大,} \\ e < x & \text{では減少} \end{array}$$

となります。

3. 極値

極大値は $x = e$ のときです。

$$y(e) = e^{1/e}.$$

したがって、

$$x = e \text{ で極大値 } e^{1/e}$$

を取ります。

数値的には

$$e^{1/e} \simeq 1.4447$$

です。

一方、最小値は存在しません。

なぜなら、 $x \rightarrow 0+$ のとき

$$\log y = \frac{\log x}{x}$$

ですが、 $\log x \rightarrow -\infty$ であり、さらに $x \rightarrow 0+$ なので

$$\frac{\log x}{x} \rightarrow -\infty$$

となります。したがって

$$y = x^{1/x} \rightarrow 0$$

です。

ただし $x = 0$ は定義域に含まれないので、実際に $y = 0$ を取ることはありません。

よって、

最小値は存在しない、
下限は 0

です。

また、 $x \rightarrow \infty$ のとき

$$\log y = \frac{\log x}{x} \rightarrow 0$$

なので、

$$y \rightarrow e^0 = 1$$

です。

4. 増減表

まとめると、増減は次のようになります。

x	$0+$	e	∞
y'	$+$	0	$-$
y	0	$\nearrow e^{1/e}$	$\searrow 1$

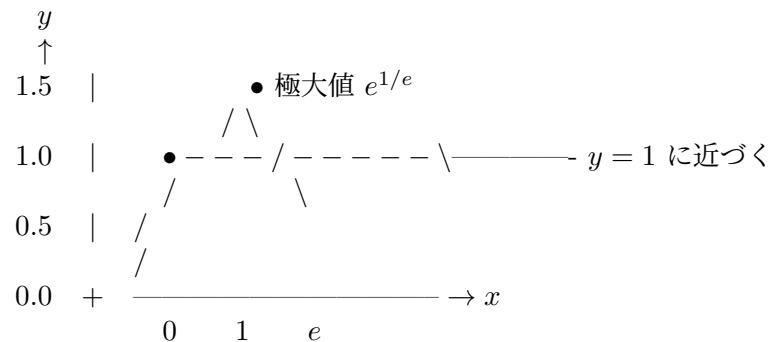
ただし、

$$x \rightarrow 0+ \text{ で } y \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \text{ で } y \rightarrow 1$$

であり、どちらも極値として実際に取る値ではありません。

5. グラフの概形

概形としては、次のような形です。



重要な点は、

(1, 1) を通る、
($e, e^{1/e}$) で最大になる、
 $x \rightarrow 0+$ で 0 に近づく、
 $x \rightarrow \infty$ で 1 に近づく

ということです。

6. 結論

定義域：	$x > 0,$
増加区間：	$0 < x < e,$
減少区間：	$e < x,$
極大値：	$e^{1/e},$
極大をとる点：	$x = e,$
最小値：	存在しない,
下限：	0,
極限：	$x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow 1.$

3 問 4 (1): 極限計算

学生側

極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

を求めてください。また、その計算過程も丁寧に教えてください。

chatGPT

求める極限は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

です。結論は

$$\frac{1}{6}$$

です。

まず、 x が 0 に近いとき、 $\sin x$ は

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

と展開できます。したがって、

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \right)$$

となります。括弧を外すと、

$$x - \sin x = x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots$$

なので、

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots$$

です。

これを x^3 で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots}{x^3} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \dots \end{aligned}$$

となります。

したがって、 $x \rightarrow 0$ とすると、 x^2 を含む項は 0 に近づくので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

です。

もう少し「数学の解答」らしく、剰余項つきで書くと次のようになります。

$x \rightarrow 0$ のとき、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

です。したがって、

$$\begin{aligned}x - \sin x &= x - \left\{ x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \right\} \\ &= \frac{x^3}{6} + O(x^5)\end{aligned}$$

です。よって、

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} + O(x^2)$$

となります。

ここで $x \rightarrow 0$ とすると $O(x^2)$ の部分は 0 に近づくので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

です。

したがって答えは

$$\frac{1}{6}$$

です。