陰関数定理の解説

私は大阪大学の1年生です．理系学部におりますが数学科ではありません．

陰関数定理と、Lagrange の未定係数法について教えてください．
とくにLagrange の未定係数法は応用上も重要と思われますので丁寧にお願いします．
大学1年生の学ぶ範囲で、なるべく平易に、かつ、具体的な例などを交えてお願いします．

説明の筋道として、まず「陰関数定理＝制約式を局所的に普通の関数として解ける条件」、次に「未定係数法＝その制約曲線・曲面上での極値条件」としてつなげて説明します。数学科向けの厳密性より、計算でどう使うかを重視します。

1. 陰関数定理とは何か

まず、普通の関数は

$$y = f(x)$$

のように、x を決めると y が決まる形で書かれます。

一方で、

$$F(x, y) = 0$$

のような式は、x と y の関係を表しているだけで、必ずしも

$$y = f(x)$$

の形に明示的に解けるとは限りません。このような関係式で定まる関数を **陰関数** といいます。

たとえば

$$x^2 + y^2 = 1$$

は円を表します。これは

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

という形です。

この式から y を解けば

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

となりますが、円全体を一つの関数 $y = f(x)$ として表すことはできません。なぜなら、同じ x に対して y が上下に二つ出てくるからです。

しかし、点 $(0, 1)$ の近く、つまり円の上半分だけを見れば

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

と書けます。

このように、

> 全体では無理でも、ある点の近くでは y を x の関数として表せるか？

を判定するのが陰関数定理です。

---

2. 2変数の場合の陰関数定理

関数

$$F(x, y)$$

が十分なめらかで、ある点 (a, b) において

$$F(a, b) = 0$$

が成り立っているとします。

このとき、もし

$$F_y(a, b) \neq 0$$

ならば、点 (a, b) の近くで方程式

$$F(x, y) = 0$$

は

$$y = \varphi(x)$$

の形に解けます。

さらに、その微分は

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$$

で与えられます。

特に点 (a, b) では

$$\varphi'(a) = -\frac{F_x(a, b)}{F_y(a, b)}$$

です。

---

3. なぜこの公式が出るか

仮に

$$F(x, y) = 0$$

が近くで

$$y = \varphi(x)$$

と書けたとします。

すると

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

です。両辺を x で微分すると、合成関数の微分により

$$F_x(x, \varphi(x)) + F_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

となります。したがって

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$$

です。

ここで $F_y \neq 0$ が必要なのは、この式で割り算するためです。

---

4. 陰関数定理の例

円

$$x^2 + y^2 = 1$$

を考えます。

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

とおくと、

$$F_x = 2x, \qquad F_y = 2y$$

です。

点 $(0, 1)$ では

$$F_y(0, 1) = 2 \neq 0$$

なので、$(0, 1)$ の近くでは

$$y = \varphi(x)$$

と書けます。実際には

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

です。

また、陰関数定理から

$$\varphi'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

です。

点 $(0,1)$ では

$$\varphi'(0)=0$$

となります。これは円の上端では接線が水平であることを意味します。

一方、点 $(1,0)$ では

$$F_y(1,0)=0$$

です。この点の近くでは、円を

$$y=\varphi(x)$$

と一つの関数として表すことはできません。実際、$(1,0)$ の近くでは円は右端にあり、接線が垂直になっています。

ただし、この点では

$$F_x(1,0)=2\neq 0$$

なので、逆に

$$x=\psi(y)$$

とは書けます。実際、

$$x=\sqrt{1-y^2}$$

です。

---

5. Lagrange の未定係数法とは何か

次に Lagrange の未定係数法、あるいはラグランジュ乗数法を説明します。

これは、制約条件つきの最大・最小問題を解く方法です。

たとえば、

$$f(x,y)$$

を最大・最小にしたいが、x,y は自由に動けるわけではなく、

$$g(x, y) = 0$$

を満たさなければならない、という問題を考えます。

つまり

$$g(x, y) = 0$$

という制約条件のもとで

$$f(x, y)$$

の最大値・最小値を調べる問題です。

---

6. 制約がない場合との違い

制約がない場合、たとえば

$$f(x, y)$$

の極値を探すには、普通は

$$f_x = 0, \qquad f_y = 0$$

を解きます。

つまり

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (0, 0)$$

を解きます。

しかし、制約条件がある場合はそうとは限りません。

たとえば

$$f(x, y) = x$$

を、単位円

$$x^2 + y^2 = 1$$

の上で最大にする問題を考えます。

円周上で x が最大になる点は

$$(1, 0)$$

です。

しかし

$$\nabla f = (1, 0)$$

なので、

$$\nabla f = 0$$

ではありません。

つまり、制約つき極値では

$$\nabla f = 0$$

を見るのでは不十分です。

---

7. 幾何的な考え方

制約条件

$$g(x, y) = 0$$

は平面上の曲線を表します。

その曲線の上で $f(x, y)$ が極大・極小になる点では、制約曲線に沿って少し動いても、f は一階の変化をしません。

つまり、制約曲線の接線方向には f は増えも減りもしない、ということです。

ここで重要なのは、勾配ベクトル

$$\nabla f = (f_x, f_y)$$

は、f が最も増える方向を向いているということです。

したがって、制約曲線上で極値を取る点では、

$$\nabla f$$

は制約曲線の接線方向に成分を持ちません。

つまり

$$\nabla f$$

は制約曲線に垂直です。

一方、制約曲線

$$g(x, y) = 0$$

に対して、

$$\nabla g = (g_x, g_y)$$

も制約曲線に垂直です。

したがって、極値点では

$$\nabla f$$

と

$$\nabla g$$

が同じ方向、または反対方向を向きます。

つまり、ある数 λ が存在して

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

となります。

これが Lagrange の未定係数法の基本式です。

---

8. Lagrange の未定係数法の形

制約条件

$$g(x, y) = 0$$

のもとで

$$f(x, y)$$

の極値を探すには、

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

と

$$g(x, y) = 0$$

を同時に解きます。

成分で書けば

$$f_x = \lambda g_x,$$

$$f_y = \lambda g_y,$$

$$g(x, y) = 0.$$

未知数は

$$x,\ y,\ \lambda$$

の三つです。

方程式も三つあるので、候補点を求められます。

この λ を **Lagrange 乗数** と呼びます。

---

9. 例1：円周上で $x + y$ を最大・最小にする

次の問題を考えます。

$$f(x, y) = x + y$$

を、制約条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

のもとで最大・最小にせよ。

制約を

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

とおきます。

すると

$$\nabla f = (1, 1)$$

であり、

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

です。

Lagrange の条件は

$$(1, 1) = \lambda(2x, 2y)$$

です。成分で書くと

$$1 = 2\lambda x,$$

$$1 = 2\lambda y,$$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

最初の二式から

$$x = y$$

が分かります。

これを制約条件に代入すると

$$x^2 + x^2 = 1$$

なので

$$2x^2 = 1$$

したがって

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$x = y$ なので、候補点は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\qquad\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

です。

それぞれで f の値を計算すると、

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2},$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}.$$

したがって、最大値は

$$\sqrt{2}$$

で、最小値は

$$-\sqrt{2}$$

です。

---

10. 例2：長方形の面積最大問題

周の長さが 20 の長方形を考えます。

縦を x、横を y とすると、制約条件は

$$2x+2y=20$$

つまり

$$x+y=10$$

です。

面積は

$$f(x,y)=xy$$

です。

したがって、

$$xy$$

を

$$x+y=10$$

のもとで最大にする問題です。

制約を

$$g(x, y) = x + y - 10$$

とおきます。

すると

$$\nabla f = (y, x)$$

であり、

$$\nabla g = (1, 1)$$

です。

Lagrange の条件は

$$(y, x) = \lambda(1, 1)$$

です。したがって

$$y = \lambda,$$

$$x = \lambda,$$

つまり

$$x = y$$

です。

制約条件

$$x + y = 10$$

より

$$2x = 10$$

なので

$$x = 5, \qquad y = 5.$$

したがって、周の長さが一定の長方形のうち面積が最大になるのは正方形です。

最大面積は

$$5 \cdot 5 = 25$$

です。

---

11. 例3：原点から直線までの距離

原点 $(0, 0)$ から直線

$$x + y = 1$$

上の点までの距離が最小となる点を求めます。

距離そのものは

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

ですが、平方根は扱いにくいので、距離の二乗

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

を最小にします。距離が最小になる点と、距離の二乗が最小になる点は同じです。

制約条件は

$$g(x,y)=x+y-1=0$$

です。

すると

$$\nabla f=(2x,2y)$$

であり、

$$\nabla g=(1,1)$$

です。

Lagrange の条件は

$$(2x,2y)=\lambda(1,1)$$

です。したがって

$$2x=\lambda,$$

$$2y=\lambda.$$

よって

$$x=y$$

です。

制約条件

$$x+y=1$$

より

$$2x=1$$

なので

$$x=\frac{1}{2},\qquad y=\frac{1}{2}.$$

したがって、原点から直線 $x+y=1$ に下ろした垂線の足は

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

です。

最小距離は

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

です。

---

12. 陰関数定理から見る Lagrange の未定係数法

ここが重要です。

制約条件

$$g(x, y) = 0$$

を考えます。

もし、ある点の近くで

$$g_y \neq 0$$

なら、陰関数定理により

$$y = \varphi(x)$$

と書けます。

つまり、制約条件つきの問題

$$f(x, y) \text{ を } g(x, y) = 0 \text{ のもとで極値にせよ}$$

は、近くでは

$$f(x, \varphi(x))$$

という1変数関数の極値問題になります。

そこで

$$h(x) = f(x, \varphi(x))$$

とおきます。

極値点では

$$h'(x) = 0$$

です。

合成関数の微分から

$$h'(x) = f_x + f_y\varphi'(x)$$

です。

また、陰関数定理より

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$$

です。

したがって

$$0 = f_x + f_y\left(-\frac{g_x}{g_y}\right)$$

なので

$$f_x g_y - f_y g_x = 0.$$

これは

$$(f_x, f_y)$$

と

$$(g_x, g_y)$$

が平行であることを意味します。

したがって、ある λ が存在して

$$(f_x, f_y) = \lambda(g_x, g_y)$$

となります。

つまり

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

です。

これが Lagrange の未定係数法です。

---

13. 高次元の場合

変数が

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

で、制約条件が一つ

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

の場合も同様です。

関数

$$f(x_1,\dots,x_n)$$

を制約条件

$$g(x_1,\dots,x_n)=0$$

のもとで極値にしたいとき、候補点では

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

が成り立ちます。

成分で書けば

$$f_{x_1}=\lambda g_{x_1},$$

$$f_{x_2}=\lambda g_{x_2},$$

$$\dots$$

$$f_{x_n}=\lambda g_{x_n},$$

$$g(x_1,\dots,x_n)=0.$$

未知数は

$$x_1,\dots,x_n,\lambda$$

で、方程式は $n+1$ 本です。

---

14. 制約条件が複数ある場合

制約条件が二つある場合、たとえば

$$g(x,y,z)=0,$$

$$h(x,y,z)=0$$

のもとで

$$f(x,y,z)$$

を極値にしたい場合は、

$$\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h$$

となります。

ここで λ,μ が未定係数です。

つまり、制約条件が一つなら

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

ですが、制約条件が二つなら

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

です。

一般に、制約条件が複数ある場合は、∇f が制約条件の勾配ベクトルたちの一次結合で表されます。

---

15. Lagrange の未定係数法を使うときの注意

Lagrange の未定係数法は非常に強力ですが、注意点があります。

注意1：候補点を出す方法であって、極値の存在を保証する方法ではない

Lagrange の未定係数法で出てくる点は、極値の候補点です。

それが本当に最大値・最小値かどうかは、最後に f の値を比較したり、問題の性質を考えたりする必要があります。

特に、制約集合が閉じていて有界な場合、つまり大ざっぱに言えば「端がなく、無限に広がっていない」場合は最大値・最小値が存在しやすいです。

たとえば円

$$x^2 + y^2 = 1$$

の上では、連続関数は最大値・最小値を持ちます。

一方、直線

$$x + y = 1$$

のように無限に広がる制約条件では、最大値が存在しないこともあります。

注意2：制約条件が正則でない点ではそのまま使えないことがある

Lagrange の未定係数法では、制約条件

$$g(x, y) = 0$$

に対して

$$\nabla g \neq 0$$

であることが重要です。

つまり

$$(g_x, g_y) \neq (0, 0)$$

である必要があります。

なぜなら、∇g が制約曲線の法線方向を表す、という考え方を使っているからです。

もし

$$\nabla g = 0$$

となる点があると、その点では制約曲線がきれいな曲線になっていない可能性があります。

たとえば

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 0$$

という制約条件を考えると、これは実際には

$$(0, 0)$$

という一点だけを表します。

この点では

$$\nabla g = (2x, 2y) = (0, 0)$$

です。

このような場合、通常の Lagrange の未定係数法の前提が崩れます。

注意3：端点や境界がある場合は別に調べる

たとえば

$$0 \leq x \leq 1$$

のような範囲制約がある場合、最大値・最小値は端点で起こることがあります。

Lagrange の未定係数法は、主に等式制約

$$g(x, y) = 0$$

に対して使う方法です。

不等式制約がある場合は、境界を別に調べる必要があります。

---

16. まとめ

陰関数定理は、

$$F(x, y) = 0$$

のような関係式を、ある点の近くで

$$y = \varphi(x)$$

の形に解ける条件を与える定理です。

基本条件は

$$F_y(a,b) \neq 0$$

です。

このとき

$$\varphi'(a) = -\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}$$

となります。

一方、Lagrange の未定係数法は、

$$g(x,y) = 0$$

という制約条件のもとで

$$f(x,y)$$

の極値を探す方法です。

その基本式は

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

です。

成分で書けば

$$f_x = \lambda g_x, \qquad f_y = \lambda g_y, \qquad g(x,y) = 0$$

です。

考え方としては、

$$g(x,y) = 0$$

が作る曲線上で極値を取るなら、f の増加方向はその曲線の接線方向には向いていない、ということです。

そのため、

$$\nabla f$$

は制約曲線に垂直になります。

そして

$$\nabla g$$

も制約曲線に垂直なので、

$$\nabla f$$

と

$$\nabla g$$

は平行になります。

これが

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

という式の意味です。

大学1年生向けに一言でまとめると、

$$\boxed{\text{陰関数定理は、制約条件を局所的に普通の関数として扱うための定理}}$$

であり、

$$\boxed{\text{Lagrange の未定係数法は、その制約条件の上で極値を探すための計算法}}$$

です。