

Taylor展開と極値問題



私は大阪大学の1年生です。理系学部におりますが数学科ではありません。

多変数を入力とする実数値関数の Taylor 展開について教えてください。

また、この Taylor 展開と、この関数の極値問題の関係についても教えてください。

大学1年生の学ぶ範囲で、なるべく平易に、かつ、具体的な例などを交えてお願いします。

多変数の Taylor 展開は、1変数の「接線・放物線で近似する」という考えを、平面上の「接平面・2次曲面で近似する」考えに拡張したものとして説明します。極値問題では、特に1次項と2次項が決定的に重要です。

以下では、2変数関数

$$z = f(x, y)$$

を中心に説明します。3変数以上でも考え方は同じです。

1. 1変数の Taylor 展開の復習

1変数関数 $f(x)$ について、点 $x = a$ の近くでは

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \dots$$

と近似できます。

これは、

$$x = a + h$$

とおいたとき、 a から少しだけ h だけ動いたときの f の値を、微分係数を使って近似している、という意味です。

特に、

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$$

は接線近似であり、

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2$$

は放物線による近似です。

2. 2変数関数の Taylor 展開

2変数関数 $f(x, y)$ を、点 (a, b) の近くで考えます。

$$x = a + h, \quad y = b + k$$

とします。つまり、点 (a, b) から、 x 方向に h 、 y 方向に k だけ動くと考えます。

このとき、2次までの Taylor 展開は

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \} + \dots$$

です。

ここで、

$$f_x, \quad f_y$$

は偏導関数、

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yy}$$

は2階偏導関数です。

3. 各項の意味

Taylor 展開を

$$f(a + h, b + k) = \text{定数項} + \text{1次項} + \text{2次項} + \dots$$

と見ると、次のようになります。

定数項

$$f(a, b)$$

これは基準点 (a, b) での関数の値です。

1次項

$$f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

これは、点 (a, b) の近くでの「接平面」に対応します。

1変数でいう

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$$

に対応するものです。

2次項

$$\frac{1}{2} \{ f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \}$$

これは、点 (a, b) の近くで関数のグラフを「2次曲面」で近似する部分です。

1変数でいう

$$\frac{1}{2} f''(a)h^2$$

に対応します。

4. 具体例： $f(x, y) = x^2y$

関数

$$f(x, y) = x^2y$$

を、点 $(1, 2)$ の近くで Taylor 展開してみます。

まず、

$$f(1, 2) = 1^2 \cdot 2 = 2$$

です。

偏導関数は

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2$$

なので、

$$f_x(1, 2) = 4, \quad f_y(1, 2) = 1$$

です。

2階偏導関数は

$$f_{xx} = 2y, \quad f_{xy} = 2x, \quad f_{yy} = 0$$

なので、

$$f_{xx}(1, 2) = 4, \quad f_{xy}(1, 2) = 2, \quad f_{yy}(1, 2) = 0$$

です。

したがって、

$$\begin{aligned} f(1+h, 2+k) &\approx 2 + 4h + k + \frac{1}{2} \{ 4h^2 + 2 \cdot 2hk + 0 \cdot k^2 \} \\ &= 2 + 4h + k + 2h^2 + 2hk \end{aligned}$$

となります。

実際に直接計算してみると、

$$\begin{aligned}
 f(1+h, 2+k) &= (1+h)^2(2+k) \\
 &= (1+2h+h^2)(2+k) \\
 &= 2+4h+k+2h^2+2hk+h^2k
 \end{aligned}$$

です。

2次までの Taylor 展開では、3次の項

$$h^2k$$

を無視していることがわかります。

5. ベクトルを使った見方

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

と書くと、2変数 Taylor 展開は少し見通しよく書けます。

まず、

$$\nabla f(a, b) = \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

を勾配ベクトルといいます。

また、

$$H(a, b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

を Hessian、またはヘッセ行列といいます。

このとき、

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H(a, b) \mathbf{h}$$

と書けます。

ただし、大学1年生の段階では、まずは

$$\begin{aligned}
 f(a+h, b+k) &= f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \} + \dots
 \end{aligned}$$

の形を理解できれば十分です。

6. Taylor 展開と極値問題の関係

ここからが重要です。

極値問題とは、関数 $f(x, y)$ がある点 (a, b) で

- 極小値をとるか
- 極大値をとるか
- どちらでもないか

を調べる問題です。

この判定に Taylor 展開が非常に役立ちます。

7. 極値をとる点では、まず 1次項が消える

点 (a, b) の近くで Taylor 展開すると、

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \dots$$

です。

もし (a, b) が極小点または極大点であれば、そこから少し動いたときに、いきなり一方向では増え、反対方向では減る、ということは起きてはいけません。

そのため、極値をとる点では通常

$$f_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) = 0$$

が必要になります。

つまり、

$$\nabla f(a, b) = 0$$

です。

このような点を停留点、または臨界点といいます。

1変数の場合に、極値の候補点で

$$f'(a) = 0$$

となることと同じです。

8. 1次項が消えた後は、2次項を見る

停留点では

$$f_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) = 0$$

なので、Taylor 展開は

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \} + \dots$$

となります。

したがって、極値の判定では、主に

$$f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$$

の符号を調べます。

この2次式が、 $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して常に正なら、 (a, b) は極小点です。

反対に、常に負なら、 (a, b) は極大点です。

正にも負にもなりうるなら、鞍点です。

9. 2変数の場合の判定法

停留点 (a, b) において、

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \{f_{xy}(a, b)\}^2$$

を考えます。

このとき、次の判定ができます。

$$D > 0, \quad f_{xx}(a, b) > 0$$

なら、極小点です。

$$D > 0, \quad f_{xx}(a, b) < 0$$

なら、極大点です。

$$D < 0$$

なら、鞍点です。

$$D = 0$$

の場合は、この判定法だけではわかりません。

10. 極小の例

関数

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

を考えます。

偏導関数は

$$f_x = 2x + y, \quad f_y = x + 2y$$

です。

停留点は

$$2x + y = 0, \quad x + 2y = 0$$

を解いて、

$$(x, y) = (0, 0)$$

です。

次に2階偏導関数を計算すると、

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 2$$

です。

したがって、

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

であり、

$$f_{xx} = 2 > 0$$

なので、 $(0, 0)$ は極小点です。

実際、

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

は原点の近くで常に0以上になります。

たとえば平方完成すると、

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

なので、

$$f(x, y) \geq 0$$

です。

したがって、原点で極小値

$$f(0, 0) = 0$$

をとります。

11. 極大の例

関数

$$f(x, y) = 5 - x^2 - xy - y^2$$

を考えます。

これは先ほどの例にマイナスをつけて、さらに定数 5 を足したものです。

偏導関数は

$$f_x = -2x - y, \quad f_y = -x - 2y$$

です。

停留点は

$$(x, y) = (0, 0)$$

です。

2階偏導関数は

$$f_{xx} = -2, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = -2$$

です。

したがって、

$$D = (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

であり、

$$f_{xx} = -2 < 0$$

なので、 $(0, 0)$ は極大点です。

実際、

$$f(x, y) = 5 - (x^2 + xy + y^2)$$

なので、 $(0, 0)$ から少し動くと $x^2 + xy + y^2$ の分だけ値が下がります。

したがって、

$$f(0, 0) = 5$$

は極大値です。

12. 鞍点の例

関数

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

を考えます。

偏導関数は

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y$$

なので、停留点は

$$(x, y) = (0, 0)$$

です。

2階偏導関数は

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = -2$$

です。

したがって、

$$D = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$$

です。

よって、 $(0, 0)$ は鞍点です。

実際、

$$f(x, 0) = x^2 > 0$$

なので、 x 軸方向に動くと値は増えます。

一方で、

$$f(0, y) = -y^2 < 0$$

なので、 y 軸方向に動くと値は減ります。

つまり原点は、ある方向から見ると谷の底のように見え、別の方向から見ると山の頂上のように見えます。

このような点を鞍点といいます。

13. なぜ 2次項で極値が判定できるのか

停留点では Taylor 展開の 1次項が消えるので、

$$f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

の符号は、まず2次項によって決まります。

たとえば、停留点で

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \approx h^2 + k^2$$

なら、 $(h, k) \neq (0, 0)$ で常に正なので、周囲の点では値が大きくなります。

したがって (a, b) は極小点です。

一方、

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \approx -(h^2 + k^2)$$

なら、周囲の点では値が小さくなります。

したがって (a, b) は極大点です。

また、

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \approx h^2 - k^2$$

なら、方向によって正にも負にもなります。

したがって極小でも極大でもなく、鞍点になります。

14. $D = 0$ の場合は注意

たとえば

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

を考えると、原点で

$$f_x = 4x^3, \quad f_y = 4y^3$$

なので、原点は停留点です。

しかし、2階偏導関数は

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 12y^2$$

なので、原点では

$$f_{xx}(0, 0) = 0, \quad f_{xy}(0, 0) = 0, \quad f_{yy}(0, 0) = 0$$

です。

したがって

$$D = 0$$

です。

しかし、

$$f(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0$$

なので、原点は極小点です。

つまり、 $D = 0$ の場合でも極値が存在することがあります。

一方で、

$$f(x, y) = x^3 + y^3$$

のような関数では、原点で2次項まで見てもすべて消えてしまいましたが、極小でも極大でもありません。

したがって、 $D = 0$ の場合は、2次の Taylor 展開だけでは判定できず、3次以上の項や別の方法を見る必要があります。

15. まとめ

2変数関数 $f(x, y)$ の Taylor 展開は、点 (a, b) の近くで

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \} + \dots$$

と書けます。

極値問題との関係は、次のように整理できます。

まず、内点で極値をとるなら、通常

$$f_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) = 0$$

が必要です。

つまり、1次項が消えます。

そのうえで、2次項

$$f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2$$

の符号を調べます。

2変数の場合、停留点で

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

とおくと、

$$D > 0, \quad f_{xx} > 0$$

なら極小、

$$D > 0, \quad f_{xx} < 0$$

なら極大、

$$D < 0$$

なら鞍点です。

ただし、

$$D = 0$$

の場合はこの方法だけでは判定不能です。

直感的には、多変数の Taylor 展開は、関数のグラフを点の近くで

- 1次までなら接平面
- 2次までなら2次曲面

で近似する方法です。

そして極値問題では、停留点の近くの形が

- お椀型なら極小

- 伏せたお椀型なら極大
- 馬の鞍型なら鞍点

になる、という見方をします。



その極小、極大の判定は変数の数が2であることに強く依存していますよね。一般に通用するような形で話をし直してください。

はい、その通りです。先ほどの

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

による判定は、**2変数の場合に特化した形**です。一般の n 変数関数では、より本質的には **Hessian 行列による二次形式の符号**を見る、という形で述べるべきです。

1. 一般の多変数関数の Taylor 展開

n 変数関数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

を考えます。点

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

の近くで、

$$x = a + h$$

と書きます。ただし

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

は小さい変位ベクトルです。

このとき、2次までの Taylor 展開は

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \text{高次の項}$$

です。

ここで

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

を勾配ベクトルといい、

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

を Hessian、またはヘッセ行列といいます。

成分で書けば、

$$h^T H_f(a) h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

です。

2. 極値問題で重要なのは「1次項」と「2次項」

Taylor 展開は

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \text{高次の項}$$

と書けます。

ここで、点 a が内部点で、そこで極小または極大をとるなら、まず

$$\nabla f(a) = 0$$

でなければなりません。

つまり、

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

です。

このような点を **停留点**、または **臨界点** といいます。

停留点では 1次項が消えるので、

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \text{高次の項}$$

となります。

したがって、極値の判定では

$$h^T H_f(a)h$$

という二次形式の符号を見ることになります。

3. 一般次元での極値判定

停留点 a において Hessian $H_f(a)$ を考えます。

場合 1 : Hessian が正定値

すべての $h \neq 0$ に対して

$$h^T H_f(a)h > 0$$

なら、 $H_f(a)$ は正定値です。

このとき、 a は **狭義の局所極小点** です。

直感的には、どの方向に少し動いても

$$f(a + h) > f(a)$$

となるので、 a は谷の底です。

場合 2 : Hessian が負定値

すべての $h \neq 0$ に対して

$$h^T H_f(a)h < 0$$

なら、 $H_f(a)$ は負定値です。

このとき、 a は **狭義の局所極大点** です。

直感的には、どの方向に少し動いても

$$f(a + h) < f(a)$$

となるので、 a は山の頂上です。

場合 3 : Hessian が不定値

ある方向 h_1 では

$$h_1^T H_f(a)h_1 > 0$$

となり、別の方向 h_2 では

$$h_2^T H_f(a) h_2 < 0$$

となるなら、 $H_f(a)$ は不定値です。

このとき、 a は **極小でも極大でもありません**。典型的には **鞍点** です。

ある方向に動くと値が増え、別の方向に動くと値が減るからです。

場合 4 : Hessian が半正定値または半負定値

すべての h に対して

$$h^T H_f(a) h \geq 0$$

だが、ある $h \neq 0$ で

$$h^T H_f(a) h = 0$$

となる場合、 $H_f(a)$ は半正定値です。

この場合は、2次の Taylor 展開だけでは極小かどうかを判定できないことがあります。

同様に、半負定値の場合も、2次の Taylor 展開だけでは極大かどうかを判定できないことがあります。

4. 一般に通用する判定のまとめ

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が十分滑らかで、点 a が内部点であるとしします。

まず

$$\nabla f(a) = 0$$

を満たす点を探します。

そのうえで Hessian

$$H_f(a)$$

を調べます。

$H_f(a)$ が正定値 $\implies a$ は狭義の局所極小点

$H_f(a)$ が負定値 $\implies a$ は狭義の局所極大点

$H_f(a)$ が不定値 $\implies a$ は極値点ではない

$H_f(a)$ が半正定値または半負定値 \implies 2次の判定だけでは一般には不十分

です。

5. 固有値で見るとわかりやすい

Hessian は、通常の十分滑らかな関数では対称行列になります。つまり

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

が成り立つからです。

対称行列については、固有値を見ると正定値・負定値・不定値を判定できます。

Hessian の固有値を

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

とします。

このとき、

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ がすべて正}$$

なら正定値です。

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ がすべて負}$$

なら負定値です。

正の固有値と負の固有値が両方あるなら不定値です。

0 の固有値がある場合は、半正定値・半負定値、または不定値になる可能性があります。

6. 2変数の判定式は、この一般論の特殊な場合

2変数の場合、Hessian は

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

です。

この行列が正定値か、負定値か、不定値かを見ると、先ほどの判定式

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

が出てきます。

つまり、

$$D > 0, \quad f_{xx} > 0$$

なら H は正定値なので極小。

$$D > 0, \quad f_{xx} < 0$$

なら H は負定値なので極大。

$$D < 0$$

なら H は不定値なので鞍点。

ということです。

したがって、2変数で出てくる D による判定は、一般論そのものではなく、

Hessian の二次形式の符号判定

を 2変数の場合書き下したものです。

7. 3変数の具体例：極小

例えば

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

を考えます。

勾配は

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix}$$

なので、停留点は

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

です。

Hessian は

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

です。

任意の

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

に対して、

$$h^T H_f h = 2h_1^2 + 4h_2^2 + 6h_3^2 > 0$$

です。

したがって Hessian は正定値であり、原点は極小点です。

実際、

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq 0$$

なので、原点で最小になります。

8. 3変数の具体例：極大

次に

$$f(x, y, z) = 10 - x^2 - 2y^2 - 3z^2$$

を考えます。

停留点はやはり

$$(0, 0, 0)$$

です。

Hessian は

$$H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

です。

任意の $h \neq 0$ に対して、

$$h^T H_f h = -2h_1^2 - 4h_2^2 - 6h_3^2 < 0$$

なので、Hessian は負定値です。

したがって原点は極大点です。

9. 3変数の具体例：鞍点

例えば

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

を考えます。

停留点は

$$(0, 0, 0)$$

です。

Hessian は

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

です。
このとき、

$$h^T H_f h = 2h_1^2 + 2h_2^2 - 2h_3^2$$

です。
例えば

$$h = (1, 0, 0)$$

なら

$$h^T H_f h = 2 > 0$$

ですが、

$$h = (0, 0, 1)$$

なら

$$h^T H_f h = -2 < 0$$

です。
つまり、方向によって値が増える場合と減る場合があります。
したがって原点は極小でも極大でもなく、鞍点です。

10. 半正定値の場合は要注意

例えば

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

を考えます。
原点では

$$\nabla f(0, 0) = 0$$

です。
しかし Hessian は

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

です。
これは正定値ではありません。半正定値ではありますが、2次項はすべて消えています。
それでも

$$f(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0$$

なので、原点は極小点です。

一方、

$$g(x, y) = x^4 - y^4$$

も原点で

$$\nabla g(0, 0) = 0$$

かつ

$$H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

です。

しかし

$$g(x, 0) = x^4 > 0$$

であり、

$$g(0, y) = -y^4 < 0$$

なので、原点は極小でも極大でもありません。

つまり、Hessian が半正定値または半負定値の場合、2次の情報だけでは足りないことがあります。

11. 正確な言い直し

一般次元で述べるなら、極値判定は次のように言うのが本質的です。

点 a が内部点で、 f が十分滑らかだとする。

まず、

$$\nabla f(a) = 0$$

でなければ、通常 a は極値点ではない。

そのうえで、Taylor 展開

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \text{高次の項}$$

を考える。

このとき、

$$h^T H_f(a) h > 0 \quad (h \neq 0)$$

なら a は狭義の局所極小点。

$$h^T H_f(a) h < 0 \quad (h \neq 0)$$

なら a は狭義の局所極大点。

$$h^T H_f(a) h$$

が方向によって正にも負にもなるなら、 a は極値点ではない。

これが、変数の個数に依存しない一般的な言い方です。

2変数の

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

による判定は、この一般論を $n = 2$ の場合に簡単に計算できる形にしたものです。