

多変数関数の連鎖率



私は大阪大学の1年生です。理系学部におりますが数学科ではありません。

私に、多変数関数の合成関数についての微分、すなわち、一般の連鎖率についてわかりやすく例を交えて教えてください。

多変数関数の合成関数の微分、つまり**一般の連鎖率**は、ひとこと言うと：

「外側の関数の変化率」×「内側の関数の変化率」を、関係する変数すべてについて足し合わせる規則です。

1. まず1変数の連鎖率を思い出す

1変数では、たとえば

$$y = f(u), \quad u = g(x)$$

のとき、

$$y = f(g(x))$$

です。このとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

でした。

たとえば

$$y = \sin(x^2)$$

なら、

$$u = x^2, \quad y = \sin u$$

と見て、

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot 2x = 2x \cos(x^2)$$

です。

多変数でも考え方は同じですが、**内側の変数が複数あるので、その分だけ足し算が出てくる**、というのが本質です。

2. 基本形： $z = f(x, y), x = x(t), y = y(t)$

まず一番よく出る形を考えます。

$$z = f(x, y)$$

で、さらに

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

とします。

このとき、実際には

$$z = f(x(t), y(t))$$

なので、 z は t の関数です。

この場合の連鎖率は

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

です。

もう少し直感的に言うと、

$$z \text{ の変化} = x \text{ 経由の変化} + y \text{ 経由の変化}$$

です。

3. 例1：具体計算

$$z = x^2y + \sin y$$

とします。また

$$x = t^2, \quad y = 3t$$

とします。

つまり

$$z = f(x(t), y(t))$$

です。

まず偏微分を計算します。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + \cos y$$

また、

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 3$$

です。

したがって連鎖率より、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

なので、

$$\frac{dz}{dt} = (2xy)(2t) + (x^2 + \cos y)(3)$$

ここで

$$x = t^2, \quad y = 3t$$

を代入して、

$$\frac{dz}{dt} = 2(t^2)(3t)(2t) + ((t^2)^2 + \cos(3t)) 3$$

よって

$$\frac{dz}{dt} = 12t^4 + 3t^4 + 3 \cos(3t)$$

したがって

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = 15t^4 + 3 \cos(3t)}$$

です。

4. 直接代入して確認する

同じ例を、先に代入して確認してみます。

$$z = x^2y + \sin y$$

に

$$x = t^2, \quad y = 3t$$

を代入すると、

$$z = (t^2)^2(3t) + \sin(3t)$$

なので、

$$z = 3t^5 + \sin(3t)$$

です。これを直接微分すると、

$$\frac{dz}{dt} = 15t^4 + 3 \cos(3t)$$

となります。

先ほどの連鎖率の計算結果と一致します。

5. 変数が2段階になっている場合

次に、

$$z = f(x, y)$$

で、

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t)$$

とします。

このとき、 z は s, t の関数になります。

$$z = f(x(s, t), y(s, t))$$

です。

この場合、 s で偏微分すると、

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

同様に、 t で偏微分すると、

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

です。

ここでも、

$$z \text{ の変化} = x \text{ 経路の変化} + y \text{ 経路の変化}$$

という考え方は同じです。

6. 例2： s, t の関数になっている場合

$$z = x^2 + y^2$$

とし、

$$x = s + t, \quad y = st$$

とします。

このとき

$$z = (s + t)^2 + (st)^2$$

ですが、連鎖率で計算してみます。

まず、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

です。

また、

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = t$$

なので、

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

より、

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2x \cdot 1 + 2y \cdot t$$

ここに

$$x = s + t, \quad y = st$$

を代入すると、

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2(s + t) + 2(st)t$$

したがって、

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = 2(s + t) + 2st^2}$$

です。

直接計算しても、

$$z = (s + t)^2 + s^2t^2$$

なので、

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2(s + t) + 2st^2$$

となり、一致します。

7. 一般形： $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

より一般に、

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

で、それぞれの x_i が t の関数

$$x_i = x_i(t)$$

であるとして、

つまり、

$$z = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

です。

このとき、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

です。

まとめて書くと、

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

です。

8. ベクトルと行列で見る連鎖率

少し進んだ見方をすると、連鎖率は行列の積として表せます。

たとえば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \end{pmatrix}$$

で、

$$z = f(x, y)$$

とします。

このとき、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

となります。

これは、

外側の微分 × 内側の微分

という形です。

1変数のときの

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

と同じ構造になっています。

9. 図式的な理解

たとえば、

$$z = f(x, y), \quad x = x(s, t), \quad y = y(s, t)$$

なら、関係は次のようになっています。

$$s, t \longrightarrow x, y \longrightarrow z$$

s を少し動かすと、まず x, y が変わります。

$$s \longrightarrow x \longrightarrow z$$

という経路と、

$$s \longrightarrow y \longrightarrow z$$

という経路があります。

したがって、

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

となります。

経路が複数あるので、それぞれの経路の寄与を足す、というイメージです。

10. 物理的なイメージ

たとえば気温 T が場所 (x, y) によって決まるとします。

$$T = T(x, y)$$

人が時刻 t に従って移動していて、

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

だとします。

この人が感じる気温の時間変化は

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

です。

ここで、

$$\frac{\partial T}{\partial x}$$

は「東西方向に動いたとき気温がどれくらい変わるか」、

$$\frac{dx}{dt}$$

は「東西方向にどれくらいの速さで動いているか」です。

したがって、

$$\frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

は「東西方向の移動による気温変化」です。

同様に、

$$\frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

は「南北方向の移動による気温変化」です。

それらを足して、

$$\frac{dT}{dt}$$

つまり「移動している人が感じる気温の変化率」になります。

11. よくある間違い

たとえば

$$z = f(x, y), \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

のとき、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

としてはいけません。

これは間違いです。

なぜなら、 x, y 自体が t によって変化しているの、その変化率

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}$$

を掛ける必要があるからです。

正しくは、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

です。

12. 連鎖率の覚え方

最初は次のように覚えるとよいです。

$$z = f(x, y), \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

なら、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

つまり、

$$t \rightarrow x \rightarrow z$$

の経路と、

$$t \rightarrow y \rightarrow z$$

の経路を考えて、

各経路で微分を掛ける

そして、

すべての経路を足す

という規則です。

13. まとめ

多変数関数の連鎖率の基本は、

外側の微分 × 内側の微分を、すべての経路について足す

というものです。

特に、

$$z = f(x, y), \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

なら、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

です。

また、

$$z = f(x, y), \quad x = x(s, t), \quad y = y(s, t)$$

なら、

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

です。

最初のうちは、式だけで覚えるよりも、

どの変数を経由しているか

を図式的に考えると理解しやすいです。



次に、ヤコビ行列について教えてください。ヤコビ行列がどう役に立つかも含めて、よくわからないのです。

ヤコビ行列は、多変数関数の微分を行列でまとめて表したものです。

最初は「偏微分を並べた表」に見えますが、本質的には

多変数関数の一次近似を表す行列

です。

1. まず何をしたいのか

1変数関数

$$y = f(x)$$

では、 $x = a$ の近くで

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

と近似できます。

これは、

$$\text{関数} \approx \text{定数項} + \text{傾き} \times \text{変化量}$$

という形です。

たとえば

$$f(x) = x^2$$

なら、 $x = 2$ の近くで

$$f(x) \approx f(2) + f'(2)(x - 2)$$

すなわち

$$x^2 \approx 4 + 4(x - 2)$$

です。

多変数関数でも同じことをしたいわけです。

たとえば

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = F(x, y)$$

のように、入力が (x, y) 、出力が (u, v) である関数を考えます。

このとき、 (x, y) を少し動かしたときに、 (u, v) がどのように変わるかを知りたい。

そのための道具がヤコビ行列です。

2. ヤコビ行列の定義

関数

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

を

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

とします。

つまり、

$$u = f_1(x, y), \quad v = f_2(x, y)$$

です。

このとき、ヤコビ行列は

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

です。

つまり、各成分関数を、それぞれ各変数で偏微分して並べたものです。

例

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \end{pmatrix}$$

とします。

つまり

$$f_1(x, y) = x^2 + y, \quad f_2(x, y) = xy$$

です。

それぞれ偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= y, & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= x \end{aligned}$$

です。

したがって

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

です。

たとえば $(x, y) = (1, 2)$ では、

$$J_F(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

です。

3. ヤコビ行列は何を表しているのか

ヤコビ行列は、点 (a, b) の近くで

$$F(x, y)$$

を一次関数で近似するための行列です。

具体的には、

$$F(x, y) \approx F(a, b) + J_F(a, b) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

です。

これは1変数の場合の

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

の多変数版です。

対応関係は次のようになります。

$$f'(a) \longleftrightarrow J_F(a, b)$$

です。

つまり、1変数関数の微分係数 $f'(a)$ に対応するものが、多変数ではヤコビ行列になります。

4. 具体例：一次近似として使う

先ほどの

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \end{pmatrix}$$

を、点 $(1, 2)$ の近くで近似します。

まず、

$$F(1, 2) = \begin{pmatrix} 1^2 + 2 \\ 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

です。

また、

$$J_F(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

でした。

したがって、 $(1, 2)$ の近くでは

$$F(x, y) \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

です。

たとえば

$$(x, y) = (1.01, 2.02)$$

とします。このとき

$$\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{pmatrix}$$

です。

よって

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

なので、

$$F(1.01, 2.02) \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.04 \\ 2.04 \end{pmatrix}$$

です。

実際には、

$$F(1.01, 2.02) = \begin{pmatrix} 1.01^2 + 2.02 \\ 1.01 \cdot 2.02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0401 \\ 2.0402 \end{pmatrix}$$

です。

かなり近い値になっています。

5. なぜ行列になるのか

入力が2個、出力が2個ある場合を考えます。

$$(x, y) \mapsto (u, v)$$

つまり

$$u = f_1(x, y), \quad v = f_2(x, y)$$

です。

入力の変化を

$$\Delta x, \quad \Delta y$$

とすると、出力の変化は近似的に

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

$$\Delta v \approx \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y$$

です。

これをまとめると、

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

となります。

この真ん中の行列がヤコビ行列です。

つまり、

入力の小さな変化 \mapsto 出力の小さな変化

を表す行列がヤコビ行列です。

6. 一般の形

より一般に、

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

を

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

とします。

このときヤコビ行列は

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

です。

行数は出力の個数 m 、列数は入力の個数 n です。

J_F は $m \times n$ 行列

になります。

7. ヤコビ行列と連鎖率

ヤコビ行列が特に便利なのは、**多変数の連鎖率が行列の積で書ける**からです。

たとえば

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

と

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

があり、合成関数

$$H = F \circ G$$

を考えます。

つまり

$$H(s, t) = F(G(s, t))$$

です。

このとき、

$$J_H(s, t) = J_F(G(s, t))J_G(s, t)$$

です。

これは、1変数の連鎖率

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

の完全な多変数版です。

例

$$G(s, t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + t \\ st \end{pmatrix}$$

とします。

また、

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \end{pmatrix}$$

とします。

このとき

$$H(s, t) = F(G(s, t))$$

です。

まず、

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

です。

次に、

$$G(s, t) = \begin{pmatrix} s + t \\ st \end{pmatrix}$$

なので、

$$J_G(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(s+t)}{\partial s} & \frac{\partial(s+t)}{\partial t} \\ \frac{\partial(st)}{\partial s} & \frac{\partial(st)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & s \end{pmatrix}$$

です。

したがって、

$$J_H(s, t) = J_F(G(s, t))J_G(s, t)$$

です。

ここで

$$x = s + t, \quad y = st$$

なので、

$$J_F(G(s, t)) = \begin{pmatrix} 2(s+t) & 1 \\ st & s+t \end{pmatrix}$$

です。

よって

$$J_H(s, t) = \begin{pmatrix} 2(s+t) & 1 \\ st & s+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & s \end{pmatrix}$$

となります。

つまり、複雑な合成関数の微分を、ヤコビ行列の積として整理できます。

8. ヤコビ行列が役に立つ場面

ヤコビ行列は、単なる計算用の記号ではありません。かなり重要です。

主な役割は次の4つです。

役割1：多変数関数の一次近似

ヤコビ行列は

$$F(a + h) \approx F(a) + J_F(a)h$$

という形で、関数を一次近似します。

これは数値計算、物理、工学、機械学習などで非常に重要です。

たとえば複雑な関数を直接扱うのが難しいとき、ある点の近くでは

$$\text{複雑な関数} \approx \text{線形関数}$$

として扱えます。

この「線形化」を与えるのがヤコビ行列です。

役割2：連鎖率を行列積で書ける

多変数関数の合成は、変数が多くなると計算が煩雑になります。

しかしヤコビ行列を使えば、

$$J_{F \circ G} = J_F(G)J_G$$

と書けます。

つまり、

$$\boxed{\text{合成関数の微分} = \text{外側のヤコビ行列} \times \text{内側のヤコビ行列}}$$

です。

これは、前回の一般の連鎖率を非常に整理した形です。

役割3：変数変換で面積や体積の変化率を表す

特に

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

の場合、ヤコビ行列の行列式

$$\det J_F$$

は、局所的な**面積の拡大率**を表します。

たとえば、変数変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

を考えます。

これは極座標から直角座標への変換です。

このとき

$$F(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

です。

ヤコビ行列は

$$J_F(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

です。

この行列式は

$$\det J_F = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

です。

つまり、

$$\boxed{dx dy = r dr d\theta}$$

に出てくる r は、ヤコビ行列の行列式から出ています。

極座標変換で面積要素が

$$dr d\theta$$

ではなく

$$r dr d\theta$$

になる理由が、ヤコビ行列の行列式です。

役割4：逆関数が存在しそうか調べる

1変数関数では、ある点で

$$f'(a) \neq 0$$

なら、その近くで逆関数が存在しやすい、という考え方があります。

多変数では対応する条件が

$$\det J_F(a) \neq 0$$

です。

たとえば

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

に対して、

$$\det J_F(a, b) \neq 0$$

なら、少なくとも (a, b) の近くでは、入力 (x, y) と出力 (u, v) の対応を局所的に逆にたどることができます。

直感的には、

$$\det J_F(a, b) \neq 0$$

なら、その点の近くで関数が空間をつぶしていない、ということです。

逆に

$$\det J_F(a, b) = 0$$

なら、その点の近くで面積がつぶれていて、逆向きに戻るのが難しくなる可能性があります。

9. 「ヤコビ行列」と「ヤコビアン」の注意

用語には少し注意が必要です。

文脈によって、

- ヤコビ行列：偏微分を並べた行列 J_F
- ヤコビアン：ヤコビ行列の行列式 $\det J_F$

を指すことがあります。

特に変数変換や重積分では、「ヤコビアン」と言ったときに

$$\det J_F$$

を意味することが多いです。

一方、連鎖率や線形化の話では、ヤコビ行列そのもの

$$J_F$$

が重要です。

10. 勾配ベクトルとの関係

実数値関数

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

の場合、つまり

$$z = f(x, y)$$

のように出力が1個だけのとき、ヤコビ行列は

$$1 \times 2$$

行列になります。

すなわち

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

です。

一方、勾配ベクトルは普通

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

と縦ベクトルで書きます。

つまり、

$$J_f = (\nabla f)^T$$

です。

本質的には同じ偏微分の情報ですが、行ベクトルとして見るか、列ベクトルとして見るかが違います。

11. まとめると

ヤコビ行列とは、

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

の微分をまとめた

$$m \times n$$

行列です。

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

です。

ただし、単に偏微分を並べた表ではなく、

$$F(a + h) \approx F(a) + J_F(a)h$$

を満たす、**多変数関数の一次近似を与える行列**だと理解するのが大切です。

ヤコビ行列が役に立つ理由は、主に次の通りです。

用途	意味
一次近似	複雑な関数を局所的に線形化する
連鎖率	合成関数の微分を行列積で書ける
変数変換	行列式が面積・体積の拡大率を表す
逆関数	行列式が0でなければ局所的に逆に戻せる可能性がある

最初に押さえるべき理解は、

ヤコビ行列は、多変数関数における「微分係数」の役割をする

ということです。



次に、極座標について教えてください。とりあえず現時点では2次元の例だけで良いです。

極座標は、平面上の点を

$$(x, y)$$

ではなく、

$$(r, \theta)$$

で表す方法です。ここで

$$r = \text{原点からの距離}, \quad \theta = x \text{ 軸の正の向きから測った角度}$$

です。

1. 直交座標と極座標

通常座標では、点 P を

$$P = (x, y)$$

と表します。

これは、

- x : 横方向にどれだけ進むか
- y : 縦方向にどれだけ進むか

を表しています。

一方、極座標では

$$P = (r, \theta)$$

と表します。

これは、

- r : 原点からどれだけ離れているか
- θ : どの方向にあるか

を表しています。

たとえば、原点から距離 2、角度 $\pi/3$ の方向にある点は

$$(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$$

と書きます。

2. 極座標から直交座標への変換

極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の関係は、三角関数から出てきます。

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

です。

つまり、

$$(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

です。

例

$$r = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

とします。

このとき

$$x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

なので、

$$\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$$

は直交座標では

$$(1, \sqrt{3})$$

です。

3. 直交座標から極座標への変換

逆に、直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) を求めるには、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

を使います。

これは三平方の定理です。

また角度については、

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

です。

ただし、 $\tan \theta = y/x$ だけでは、どの象限にあるかを間違える可能性があります。

たとえば、

$$(x, y) = (1, 1)$$

と

$$(x, y) = (-1, -1)$$

はどちらも

$$\frac{y}{x} = 1$$

ですが、点の方向はまったく違います。

したがって、 θ を求めるときは、点がどの象限にあるかを確認する必要があります。

例

$$(x, y) = (1, \sqrt{3})$$

とします。

まず、

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

です。

また、

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

なので、

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

です。

したがって、

$$(1, \sqrt{3})$$

は極座標では

$$\boxed{\left(2, \frac{\pi}{3}\right)}$$

です。

4. 極座標表示は一意ではない

ここは重要です。

直角座標 (x, y) は、普通は点を一意に表します。

しかし極座標 (r, θ) は一意ではありません。

たとえば

$$(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$$

と

$$\left(2, \frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$$

は同じ点を表します。

なぜなら、角度を 2π だけ増やしても一周して同じ方向に戻るからです。

また、負の r を許す流儀では、

$$(r, \theta)$$

と

$$(-r, \theta + \pi)$$

も同じ点を表します。

通常の初等的な扱いでは、

$$r \geq 0$$

として考えることが多いです。

5. 極座標で表すと簡単になる図形

極座標が便利なのは、**原点からの距離**や**角度**で自然に表される図形です。

代表例は円です。

例1：原点中心の円

直交座標で、原点中心・半径 a の円は

$$x^2 + y^2 = a^2$$

です。

極座標では

$$x^2 + y^2 = r^2$$

なので、

$$r^2 = a^2$$

したがって

$$r = a$$

です。

つまり、原点中心の円は極座標では非常に簡単に

$$r = a$$

と書けます。

例2：原点から出る半直線

角度が一定の直線、たとえば

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

は、原点から 45° の方向に伸びる半直線です。

直交座標では

$$y = x, \quad x \geq 0$$

ですが、極座標では

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

だけで表せます。

6. 極座標で関数を見る

直交座標では、関数を

$$z = f(x, y)$$

と書きます。

極座標を使うと、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

なので、

$$z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

と書けます。

つまり、同じ関数を

$$z = g(r, \theta)$$

として見ることができます。

ここで

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

です。

例

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

とします。

極座標に変換すると、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \\ &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

です。

したがって

$$\boxed{f(x, y) = x^2 + y^2 \iff g(r, \theta) = r^2}$$

です。

これは、原点からの距離だけで決まる関数なので、極座標ではとても簡単になります。

7. 極座標と偏微分

前回までの連鎖率・ヤコビ行列とつながる大事な話です。

$$z = f(x, y)$$

で、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

とします。

すると

$$z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

です。

これを r で偏微分すると、連鎖率により

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

です。

ここで

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$$

なので、

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

です。

同様に、 θ で偏微分すると、

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

です。

ここで

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

なので、

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

です。

8. ヤコビ行列として見る

極座標から直交座標への変換

$$F(r, \theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

を考えます。

このヤコビ行列は

$$J_F(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

です。

計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \end{aligned}$$

なので、

$$J_F(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

です。

この行列は、

(r, θ) を少し変えたとき、 (x, y) がどう変わるか

を表しています。

9. 面積要素 $dx dy = r dr d\theta$

極座標で重積分をするとき、

$$dx dy$$

は単に

$$dr d\theta$$

にはなりません。

正しくは

$$dx dy = r dr d\theta$$

です。

この r がどこから出てくるのかが、極座標で最初につまずきやすい点です。

直感的な説明

極座標で、

r を dr だけ増やす

と、半径方向に長さ dr だけ動きます。

一方、

θ を $d\theta$ だけ増やす

と、円周方向に動きます。

半径 r の円では、角度 $d\theta$ に対応する弧の長さは

$$r d\theta$$

です。

したがって、小さな領域の面積はだいたい

$$dr \times r d\theta$$

なので、

$$\boxed{dA = r dr d\theta}$$

になります。

ヤコビアンによる説明

さきほどのヤコビ行列

$$J_F(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

の行列式を計算します。

$$\begin{aligned} \det J_F &= \cos \theta \cdot r \cos \theta - (-r \sin \theta) \cdot \sin \theta \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta \\ &= r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r \end{aligned}$$

です。

したがって、

$$dx dy = |\det J_F| dr d\theta = r dr d\theta$$

となります。

10. 極座標で重積分を計算する例

たとえば、半径 a の円盤

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

の面積を求めます。

直交座標では少し面倒ですが、極座標では

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

です。

面積は

$$\iint_D 1 dx dy$$

です。

極座標にすると、

$$\iint_D 1 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a 1 \cdot r dr d\theta$$

です。

内側を計算すると、

$$\int_0^a r dr = \frac{a^2}{2}$$

したがって、

$$\int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} d\theta = \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi = \pi a^2$$

です。

よって円の面積公式

$$\boxed{\pi a^2}$$

が得られます。

11. 極座標が役に立つ場面

極座標は、次のような場面で特に便利です。

原点中心の円や円盤が出るとき

たとえば

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

は極座標では

$$0 \leq r \leq a$$

になります。

非常に簡単です。

$x^2 + y^2$ がたくさん出るとき

たとえば

$$e^{-(x^2+y^2)}$$

は極座標では

$$e^{-r^2}$$

になります。

原点からの距離だけで決まる関数を扱うとき

たとえば

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

は極座標では

$$f(r, \theta) = r$$

です。

また、

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

は

$$f(r, \theta) = \frac{1}{r^2}$$

です。

12. 注意すべき点

極座標では、原点 $r = 0$ で角度 θ が定まりません。

実際、原点はどの方向から見ても原点です。

$$r = 0$$

のとき、

$$(0, \theta)$$

はどんな θ でも同じ点を表します。

したがって、極座標は原点付近では少し特別な扱いが必要になります。

また、 θ は

$$\theta$$

と

$$\theta + 2\pi$$

が同じ方向を表すので、角度の範囲をあらかじめ決めて扱うことが多いです。

たとえば

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

や

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

などです。

13. まとめ

2次元の極座標では、点を

$$(x, y)$$

ではなく、

$$(r, \theta)$$

で表します。

関係式は

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

です。

ただし、 θ を決めるときは象限に注意します。

極座標が便利なのは、円や原点からの距離が自然に出てくる問題です。

特に、

$$x^2 + y^2 = r^2$$

なので、原点中心の円や円盤が非常に簡単に表せます。

また、面積要素は

$$dx dy = r dr d\theta$$

となります。

この r は、極座標変換のヤコビアン

$$\det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r$$

から出てきます。

極座標は、単なる座標の取り替えではなく、

問題の対称性に合わせて、式や積分を簡単にする道具

だと理解するとよいです。



最後に、接平面について教えてください。大学1年生の学ぶ範囲でお願いします。

接平面とは、ひとこと言うと、

曲面を、ある一点の近くで最もよく近似する平面

です。

1変数関数でいう「接線」の、多変数関数版だと思えばよいです。

1. まず1変数の接線を思い出す

1変数関数

$$y = f(x)$$

について、点 $x = a$ の近くでは

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

と近似できます。

この右辺

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

が、グラフ $y = f(x)$ の $x = a$ における接線です。

たとえば

$$f(x) = x^2$$

なら、 $x = 1$ における接線は

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

です。

$$f(1) = 1, \quad f'(x) = 2x, \quad f'(1) = 2$$

なので、

$$y = 1 + 2(x - 1)$$

すなわち

$$y = 2x - 1$$

です。

2. 多変数では「接線」ではなく「接平面」

2変数関数

$$z = f(x, y)$$

を考えます。

このグラフは、3次元空間内の曲面になります。

$$z = f(x, y)$$

という形です。

1変数関数のグラフは曲線なので、ある点で接するものは直線でした。

一方、2変数関数のグラフは曲面なので、ある点で接するものは平面になります。

それが**接平面**です。

3. 接平面の公式

関数

$$z = f(x, y)$$

のグラフを考えます。

点

$$(x, y) = (a, b)$$

における曲面上の点は

$$(a, b, f(a, b))$$

です。

この点における接平面の方程式は

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

です。

ここで

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

です。

つまり、

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

です。

4. 公式の意味

この式は、前に出てきた一次近似そのものです。

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

つまり、点 (a, b) の近くで、曲面

$$z = f(x, y)$$

を平面で近似しているわけです。

それが接平面です。

1変数の場合の

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

と対応させると、

$$f'(a)(x - a)$$

に対応する部分が、多変数では

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

になります。

5. 例1 : $z = x^2 + y^2$ の接平面

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

を考えます。

点

$$(a, b) = (1, 2)$$

における接平面を求めます。

まず、

$$f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5$$

です。

次に偏微分を計算します。

$$f_x(x, y) = 2x$$

$$f_y(x, y) = 2y$$

したがって、

$$f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(1, 2) = 4$$

です。

接平面の公式に代入すると、

$$z = f(1, 2) + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2)$$

なので、

$$z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$$

です。

整理すると、

$$z = 5 + 2x - 2 + 4y - 8$$

したがって、

$$z = 2x + 4y - 5$$

です。

これが曲面

$$z = x^2 + y^2$$

の点

$$(1, 2, 5)$$

における接平面です。

6. 接平面は「近くでよく合う」

先ほどの曲面

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

を点 $(1, 2)$ の近くで見ると、

$$f(x, y) \approx 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$$

です。

たとえば

$$(x, y) = (1.01, 2.02)$$

で比べてみます。

まず実際の値は

$$\begin{aligned} f(1.01, 2.02) &= 1.01^2 + 2.02^2 \\ &= 1.0201 + 4.0804 = 5.1005 \end{aligned}$$

です。

一方、接平面による近似は

$$\begin{aligned} &5 + 2(1.01 - 1) + 4(2.02 - 2) \\ &= 5 + 2(0.01) + 4(0.02) \\ &= 5 + 0.02 + 0.08 = 5.10 \end{aligned}$$

です。

実際の値

$$5.1005$$

と接平面による近似

5.10

はかなり近いです。

このように、接平面は曲面をその点の近くでよく近似します。

7. 偏微分係数との関係

接平面の式

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

において、

$$f_x(a, b)$$

は、 $y = b$ に固定して x 方向に動いたときの傾きです。

一方、

$$f_y(a, b)$$

は、 $x = a$ に固定して y 方向に動いたときの傾きです。

つまり接平面は、

- x 方向の傾き
- y 方向の傾き

の両方を使って決まります。

曲面上で、 x 方向に少し動くと

$$z \text{ は } f_x(a, b)(x - a)$$

だけ変わり、 y 方向に少し動くと

$$z \text{ は } f_y(a, b)(y - b)$$

だけ変わる、という近似です。

8. 接平面を決める2本の接線

接平面は、2本の接線から決まると考えることもできます。

曲面

$$z = f(x, y)$$

の点 $(a, b, f(a, b))$ を考えます。

まず $y = b$ と固定すると、

$$z = f(x, b)$$

という1変数関数になります。

これは xz -方向の曲線です。

この曲線の $x = a$ における接線の傾きが

$$f_x(a, b)$$

です。

次に $x = a$ と固定すると、

$$z = f(a, y)$$

という1変数関数になります。

この曲線の $y = b$ における接線の傾きが

$$f_y(a, b)$$

です。

接平面は、この2方向の接線を両方含む平面です。

9. 例2：少し複雑な関数

$$z = f(x, y) = xy + \sin x$$

の点

$$(a, b) = (0, 2)$$

における接平面を求めます。

まず、

$$f(0, 2) = 0 \cdot 2 + \sin 0 = 0$$

です。

偏微分は、

$$f_x(x, y) = y + \cos x$$

$$f_y(x, y) = x$$

です。

したがって、

$$f_x(0, 2) = 2 + \cos 0 = 3$$

$$f_y(0, 2) = 0$$

です。

接平面の公式より、

$$z = f(0, 2) + f_x(0, 2)(x - 0) + f_y(0, 2)(y - 2)$$

なので、

$$z = 0 + 3x + 0(y - 2)$$

したがって、

$$z = 3x$$

です。

この例では、点 $(0, 2)$ の近くでは、 y 方向の変化は一次近似には現れません。
なぜなら

$$f_y(0, 2) = 0$$

だからです。

10. 接平面とヤコビ行列の関係

前回のヤコビ行列と結びつけると、接平面はとても自然に理解できます。

実数値関数

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

のヤコビ行列は

$$J_f(a, b) = (f_x(a, b) \quad f_y(a, b))$$

です。

入力の変化を

$$\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

とすると、

$$f(x, y) \approx f(a, b) + J_f(a, b) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

です。

つまり、

$$f(x, y) \approx f(a, b) + (f_x(a, b) \quad f_y(a, b)) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

なので、

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

です。

これは接平面の式そのものです。

したがって、

接平面は、ヤコビ行列による一次近似を幾何的に見たもの

と言えます。

11. 接平面と勾配ベクトル

勾配ベクトルは

$$\nabla f(a, b) = \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

です。

接平面の式は

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

でした。

これを内積で書くと、

$$z = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

です。

つまり、接平面は勾配ベクトルを使っても書けます。

12. 法線ベクトルを使った接平面の表し方

接平面は平面なので、法線ベクトルを使って表すこともできます。

曲面

$$z = f(x, y)$$

を

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

と書き直します。

このとき、接平面の法線ベクトルは

$$(f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$$

です。

したがって接平面は

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

と書けます。

整理すると、

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

になり、同じ式が得られます。

13. どんなときに接平面が存在するか

大学1年生の範囲では、まず次のように理解しておけばよいです。

$$f_x, f_y$$

が点 (a, b) の近くで存在していて、しかも連続なら、接平面はきちんと存在します。

つまり、

$$f_x, f_y \text{ が連続}$$

なら、接平面を使った一次近似

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

が正当化されます。

注意したいのは、偏微分係数が存在するだけでは、常にきれいな接平面があるとは限らない、という点です。

ただし、最初の学習段階では、

偏微分が普通に計算できて連続なら、接平面がある

と考えて問題ありません。

14. 接平面が役に立つ理由

接平面は、単に図形的な概念ではありません。

主に次のように役に立ちます。

1. 複雑な関数を簡単な平面で近似できる

曲面

$$z = f(x, y)$$

が複雑でも、ある点の近くでは

$$z \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

という一次式で近似できます。

一次式は計算しやすいので、近似計算に役立ちます。

2. 誤差の見積もりに使える

たとえば、測定値 x, y に少し誤差があるとき、 $f(x, y)$ にどの程度の誤差が出るかを近似できます。

$$\Delta z \approx f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y$$

です。

これは実験、物理、工学、数値計算でよく使われる考え方です。

3. 多変数関数の「局所的な形」がわかる

接平面を見ると、その点の近くで曲面がどちら向きに上がっているか、どちら向きに下がっているかがわかります。

たとえば

$$f_x(a, b) > 0$$

なら、 x 方向に進むと z は増えます。

$$f_y(a, b) < 0$$

なら、 y 方向に進むと z は減ります。

接平面は、その情報を一つの平面としてまとめたものです。

15. まとめ

接平面とは、

$$z = f(x, y)$$

という曲面を、ある点

$$(a, b, f(a, b))$$

の近くで最もよく近似する平面です。

公式は

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

です。

これは、1変数関数の接線

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

の多変数版です。

対応関係は次のようになります。

1変数	2変数
$y = f(x)$	$z = f(x, y)$
グラフは曲線	グラフは曲面
接線	接平面
$f'(a)$	$f_x(a, b), f_y(a, b)$
$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$	$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$

最も大切なのは、

接平面は、多変数関数の一次近似を表す平面

という理解です。