

多変数関数の極限



私は大阪大学の1年生です。理系学部におりますが数学科ではありません。その私に、多変数関数(出力は実数)の極限と偏微分について、それぞれ把握すべきポイントや概念等をわかりやすく解説してください。

以下では、まず

$$f(x, y)$$

のような **2変数関数** を中心に説明します。ただし考え方は

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

にもそのまま拡張できます。出力は実数、つまり

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

というタイプの関数です。

1. 多変数関数の極限

1.1 まず 1変数の極限との違い

1変数関数では、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

を考えると、 x は数直線上で a に近づきます。

近づき方は基本的に

$$x < a \quad \text{から近づく}$$

または

$$x > a \quad \text{から近づく}$$

の2方向です。

一方、2変数関数では

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

を考えます。このとき点 (x, y) は平面上で (a, b) に近づきます。

ここが重要です。

平面では、点への近づき方が無数にあります。

例えば $(0, 0)$ に近づく場合でも、

$$y = 0$$

に沿って近づくこともできるし、

$$x = 0$$

に沿って近づくこともできるし、

$$y = x, \quad y = x^2, \quad y = 2x$$

など、いくらでも近づき方があります。

したがって、多変数関数の極限では次が本質です。

どの経路から近づいても、同じ値に近づくときだけ、極限が存在する。

1.2 多変数関数の極限の意味

例えば

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L$$

とは、大ざっぱに言えば、

点 (x, y) が $(0, 0)$ に十分近づけば、近づき方によらず $f(x, y)$ が L に近づく

という意味です。

つまり、 $(0, 0)$ のまわりの小さな円の内側を考えたとき、その円の中では $f(x, y)$ の値がだいたい L に近い、というイメージです。

1変数なら「左右から近づく」だけでしたが、多変数では「全方向から近づく」必要があります。

2. 極限が存在しないことを示す典型的な方法

多変数関数の極限で最も大事なテクニックはこれです。

2つの異なる経路で近づいたとき、極限值が異なれば、極限は存在しない。

例えば

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

を考えます。 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ の極限を調べます。

まず $y = 0$ に沿って近づくと、

$$f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

です。したがって

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$$

です。

一方、 $x = 0$ に沿って近づくと、

$$f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

です。したがって

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = -1$$

です。

近づき方によって

1

になったり

-1

になったりします。

したがって

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

は存在しません。

3. 極限が存在することを示す典型的な方法

逆に、極限が存在することを示すには、「いくつかの経路で同じ値だった」だけでは不十分です。

なぜなら、経路は無数にあるからです。

したがって、極限が存在することを示すには、よく次のような方法を使います。

3.1 距離で評価する

$$(x, y) \rightarrow (0, 0)$$

のとき、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

とおきます。これは点 (x, y) と原点との距離です。

例えば

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

について考えます。

分子は $x^2 y$ 、分母は $x^2 + y^2$ です。

ここで

$$|x| \leq r, \quad |y| \leq r, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

なので、

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x|^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{r^2 r}{r^2} = r$$

となります。

したがって

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq r$$

です。

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$ なら $r \rightarrow 0$ なので、はさみうちにより

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

です。

このように、多変数の極限では

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

を使って評価することが非常に重要です。

4. 偏微分とは何か

次に偏微分です。

2変数関数

$$z = f(x, y)$$

を考えます。

これは、入力が2つあり、出力が1つある関数です。例えば地形の高さを表す関数だと思えばよいです。

$f(x, y) =$ 地点 (x, y) における高さ

です。

このとき、 x 方向に少し動いたとき高さがどれくらい変わるか、あるいは y 方向に少し動いたとき高さがどれくらい変わるかを考えます。

これが偏微分です。

4.1 x に関する偏微分

x に関する偏微分は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

と書きます。定義は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

です。

ここで $y = b$ は固定しています。

つまり、

y を固定して、 x だけを少し動かしたときの変化率

です。

4.2 y に関する偏微分

同様に、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

は

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

です。

これは、

x を固定して、 y だけを少し動かしたときの変化率

です。

5. 偏微分の計算方法

例えば

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^2$$

とします。

x で偏微分するときは、 y を定数だと思って微分します。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 3xy^2)$$

です。

ここで y は定数扱いなので、

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = 2xy$$

また

$$\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2) = 3y^2$$

です。したがって

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2$$

です。

一方、 y で偏微分するときは、 x を定数だと思って微分します。

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 3xy^2)$$

なので、

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = x^2$$

また

$$\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2) = 6xy$$

です。したがって

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy$$

です。

6. 偏微分の幾何学的意味

関数

$$z = f(x, y)$$

のグラフは、3次元空間内の曲面になります。

このとき

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

は、点 (a, b) において、 x 方向に切った断面の傾きです。

つまり、 $y = b$ という平面で曲面を切ると、1変数関数

$$z = f(x, b)$$

のグラフが得られます。その点 $x = a$ における傾きが

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

です。

同様に、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

は、 $x = a$ で固定して、 y 方向に切った断面の傾きです。

7. 偏微分と「本当の意味での微分」の違い

ここはかなり重要です。

1変数では、微分可能であるとは、その点の近くでグラフが直線によく近似できる、という意味でした。

多変数では、微分可能であるとは、その点の近くで曲面が平面によく近似できる、という意味です。

例えば (a, b) の近くで

$$f(x, y)$$

が

$$f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$$

のような一次式によく近似できるとき、 f は (a, b) で微分可能といいます。

このとき

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

になります。

したがって、微分可能ならば偏微分は存在します。

しかし、逆は必ずしも成り立ちません。

偏微分が存在しても、関数が微分可能とは限らない。

これは多変数微分で非常に重要な注意点です。

8. 偏微分が存在しても連続とは限らない

例えば

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

を考えます。

まず、原点での x に関する偏微分を調べます。

定義より

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

です。ところが

$$f(h, 0) = 0$$

なので、

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

です。したがって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

です。

同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

です。

しかし、この関数は原点で連続ではありません。なぜなら、 $y = x$ に沿って近づくと、

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

となるからです。

一方、原点での値は

$$f(0, 0) = 0$$

です。
したがって

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

は0ではありません。そもそも近づき方によって値が変わるので、極限は存在しません。
つまり、この例では

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

は存在するのに、関数は原点で連続でさえありません。

9. 勾配ベクトル

偏微分をまとめたものを **勾配ベクトル** といいます。

2変数の場合、

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

です。
例えば

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

なら、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

なので、

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

です。
勾配ベクトルには重要な意味があります。

勾配ベクトルは、その点で f が最も増加する方向を表す。

また、その大きさ

$$|\nabla f|$$

は、その方向への増加の速さを表します。

10. 接平面

関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) で十分よく微分できるとき、点

$$(a, b, f(a, b))$$

における接平面は

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

で表されます。

これは、1変数の場合の接線

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

の多変数版です。

対応関係は次のようになります。

1変数：接線

多変数：接平面

です。

11. 方向微分

偏微分は、 x 軸方向、 y 軸方向への変化率でした。

しかし、平面上にはほかにも無数の方向があります。

そこで、単位ベクトル

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

の方向への変化率を考えます。これを **方向微分** といいます。

関数が十分よく微分可能ならば、方向微分は

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

で計算できます。

つまり、

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)u_2$$

です。

偏微分は方向微分の特別な場合です。

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

は $(1, 0)$ 方向の方向微分で、

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

は $(0, 1)$ 方向の方向微分です。

12. 多変数関数で把握すべき重要ポイント

最後に、特に大事なポイントを整理します。

極限について

多変数関数の極限では、点への近づき方が無数にあります。したがって、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$$

が存在するためには、どの方向・どの経路から近づいても同じ値にならないけません。

極限が存在しないことを示すには、異なる経路で異なる値になることを示すのが典型的です。例えば $y = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = kx$, $y = x^2$ などを試します。

一方、極限が存在することを示すには、一部の経路だけを調べても不十分です。距離

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

を使って全方向をまとめて評価することがよくあります。

偏微分について

偏微分とは、ほかの変数を固定して、1つの変数だけについて微分することです。

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

は x 方向の変化率、

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

は y 方向の変化率です。

幾何学的には、曲面を x 方向または y 方向に切った断面の傾きです。

特に注意すべきこと

多変数関数では、

偏微分が存在する

ことと

関数が連続である

ことや

関数が微分可能である

ことは同じではありません。

重要な関係は次のようになります。

微分可能 \Rightarrow 連続

また、

微分可能 \Rightarrow 偏微分可能

です。

しかし逆に、

偏微分可能 \Rightarrow 微分可能

とは限りません。

また、

偏微分可能 \Rightarrow 連続

とも限りません。

ここが1変数関数との大きな違いです。

13. 一言でまとめると

多変数関数の極限では、

点への近づき方が無数にある

ことが本質です。

偏微分では、

ある1つの方向だけに注目して変化率を見る

ことが本質です。

ただし、多変数関数を本当に「微分可能」と言うためには、すべての方向の変化をまとめて一次式、つまり接平面で近似できる必要があります。

そのため、多変数微分では

極限

偏微分

方向微分
全微分・接平面

を区別して理解することが非常に大切です。