

2x2 行列 A を

(7 -6)

(3 -2)

とします。このとき、A の固有値、固有ベクトルのペアをすべて求めて下さい。



20 秒の間、Thought ▾

問題の概要：

2×2行列 A が次のように与えられています。

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

この行列の固有値とそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めます。

解答：

ステップ1：固有値の計算

固有値 λ は、次の固有方程式を解くことで求められます。

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ここで、 I は2×2の単位行列です。

(1) $A - \lambda I$ の計算

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 7 - \lambda & -6 \\ 3 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

(2) 行列式の計算

$$\det(A - \lambda I) = (7 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-6)(3)$$

計算します。

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (7 - \lambda)(-2 - \lambda) + 18 \\ &= [(7)(-2 - \lambda) - \lambda(-2 - \lambda)] + 18 \\ &= [-14 - 7\lambda - (-2\lambda + \lambda^2)] + 18 \\ &= [-14 - 7\lambda + 2\lambda - \lambda^2] + 18 \\ &= [-14 + (-5\lambda) - \lambda^2] + 18 \\ &= (-\lambda^2 - 5\lambda - 14) + 18 \\ &= -\lambda^2 - 5\lambda + 4 \end{aligned}$$

(3) 固有方程式の設定

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies -\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

両辺に -1 をかけて簡略化します。

$$\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0$$

(4) 二次方程式の解法

二次方程式を解きます。

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ここで、 $a = 1, b = 5, c = -4$ です。

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 16}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}\end{aligned}$$

しかし、ここで計算結果がおかしいことに気付きます。実際には、最初の行列式の計算に誤りがありました。

(2) 行列式の再計算

先ほどの計算に誤りがあったため、もう一度計算します。

$$\det(A - \lambda I) = (7 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-6)(3)$$

展開します。

$$\begin{aligned}(7 - \lambda)(-2 - \lambda) &= (7)(-2 - \lambda) - \lambda(-2 - \lambda) \\ &= -14 - 7\lambda - (-2\lambda + \lambda^2) \\ &= -14 - 7\lambda + 2\lambda - \lambda^2 \\ &= -14 - 5\lambda - \lambda^2\end{aligned}$$

次に、 $-6 \times 3 = -18$ なので、全体の行列式は

$$\det(A - \lambda I) = (-14 - 5\lambda - \lambda^2) - (-18) = -14 - 5\lambda - \lambda^2 + 18$$

計算すると、

$$\det(A - \lambda I) = (-14 + 18) - 5\lambda - \lambda^2 = 4 - 5\lambda - \lambda^2$$

よって、

$$-\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

再び両辺に -1 をかけて、

$$\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0$$

(4) 二次方程式の解法（正しい版）

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

したがって、固有値は実数ではなく、虚数を含む解になります。しかし、問題文に与えられた行列は実数成分のみであり、固有値も実数になることが期待されます。

しかし、ここで最初の計算が間違っていた可能性があります。行列式の計算を再度確認します。

再度、行列式の計算を見直します

$$\det(A - \lambda I) = (7 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-6)(3)$$

展開します。

$$\begin{aligned}(7 - \lambda)(-2 - \lambda) &= (7)(-2) + (7)(-\lambda) + (-\lambda)(-2) + (-\lambda)(-\lambda) \\ &= -14 - 7\lambda + 2\lambda + \lambda^2 \\ &= -14 - 5\lambda + \lambda^2\end{aligned}$$

次に、 $-6 \times 3 = -18$ なので、全体の行列式は

$$\det(A - \lambda I) = (-14 - 5\lambda + \lambda^2) - (-18) = (-14 - 5\lambda + \lambda^2) + 18$$

計算すると、

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$$

これが正しい固有方程式です。

(5) 二次方程式を解く

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

解を求めます。

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

したがって、

- 固有値1：

$$\lambda_1 = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

- 固有値2：

$$\lambda_2 = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

固有値は $\lambda = 4$ と $\lambda = 1$ です。

ステップ2：各固有値に対する固有ベクトルの計算

(A) 固有値 $\lambda = 4$ の場合

(1) 連立方程式の設定

$$(A - 4I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$A - 4I$ を計算します。

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 7-4 & -6 \\ 3 & -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} 3v_1 - 6v_2 = 0 \\ 3v_1 - 6v_2 = 0 \end{cases}$$

これは同じ方程式なので、1つの独立な方程式があります。

(3) 方程式を簡単化

両辺を3で割ります。

$$v_1 - 2v_2 = 0 \implies v_1 = 2v_2$$

(4) 固有ベクトルの一般形

したがって、固有ベクトルは

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v_2 \neq 0$ として、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍です。

(B) 固有値 $\lambda = 1$ の場合

(1) 連立方程式の設定

$$(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$A - I$ を計算します。

$$A - I = \begin{pmatrix} 7-1 & -6 \\ 3 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} 6v_1 - 6v_2 = 0 \\ 3v_1 - 3v_2 = 0 \end{cases}$$

これも同じ方程式なので、1つの独立な方程式があります。

(3) 方程式を簡単化

両辺を3で割ります。

$$2v_1 - 2v_2 = 0 \implies v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$$

(4) 固有ベクトルの一般形

したがって、固有ベクトルは

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v_2 \neq 0$ として、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍です。

答え

- 固有値と固有ベクトルのペア

1. 固有値 $\lambda = 4$:

- 固有ベクトル : $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の任意の定数倍

2. 固有値 $\lambda = 1$:

- 固有ベクトル : $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の任意の定数倍
-

まとめ :

- 固有値 : $\lambda = 4, 1$
- 対応する固有ベクトル :

- $\lambda = 4$ のとき : $\mathbf{v} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k \neq 0$

- $\lambda = 1$ のとき : $\mathbf{v} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \neq 0$



48 秒の間、Thought

ケーリー・ハミルトンの定理を用いて正方行列の高次のべき乗を計算する方法

1. ケーリー・ハミルトンの定理とは

ケーリー・ハミルトンの定理は、任意の正方行列 A はその特性多項式を満たすというものです。具体的には、行列 A の特性多項式 $p(\lambda)$ を行列 A 自身に代入すると零行列になります。

特性多項式 $p(\lambda)$ は次のように定義されます：

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

ここで、 $\det$ は行列式、 I は単位行列です。

ケーリー・ハミルトンの定理によれば、

$$p(A) = O$$

となります。ここで、 O は零行列です。

2. 高次のべき乗を計算する手順

ケーリー・ハミルトンの定理を用いて行列の高次のべき乗 A^n を計算する手順は以下の通りです。

ステップ1：特性多項式を求める

行列 A の特性多項式 $p(\lambda)$ を計算します。

ステップ2：ケーリー・ハミルトンの定理を適用する

特性多項式 $p(\lambda)$ において、変数 λ を行列 A に置き換えます。つまり、

$$p(A) = 0$$

となります。この等式を利用して、行列 A の高次のべき乗を A の低次のべき乗の線形結合として表現します。

ステップ3：再帰関係を確立する

A^n を A の低次のべき乗の線形結合として表すために、再帰関係を確立します。

ステップ4：高次のべき乗を計算する

再帰関係を用いて、目的のべき乗 A^n を計算します。

3. 具体例による説明

具体的な例として、 2×2 行列 A を用いて説明します。

行列 A を次のように定義します：

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ステップ1：特性多項式を求める

特性多項式は次のように計算します。

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -6 \\ 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (7 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-6)(3) \\ &= (7 - \lambda)(-2 - \lambda) + 18 \\ &= [(7)(-2 - \lambda) - \lambda(-2 - \lambda)] + 18 \\ &= [-14 - 7\lambda + 2\lambda + \lambda^2] + 18 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \end{aligned}$$

ステップ2：ケーリー・ハミルトンの定理を適用する

特性方程式は、

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$p(A) = A^2 - 5A + 4I = O$$

これを変形すると、

$$A^2 = 5A - 4I$$

ステップ3：再帰関係を確立する

上記の関係式を利用して、 A の高次のべき乗を再帰的に表します。

一般的に、

$$A^n = 5A^{n-1} - 4A^{n-2}$$

となります。

ステップ4：高次のべき乗を計算する

再帰関係を用いて、目的のべき乗 A^n を計算します。

4. 一般項の導出

再帰関係：

$$A^n = 5A^{n-1} - 4A^{n-2}$$

この再帰関係は線形で定数係数のホモジニアスな差分方程式なので、一般解を求めることができます。

(1) 特性方程式を求める

再帰関係の特性方程式は、

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

これを解くと、

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

したがって、根は $r = 4$ と $r = 1$ です。

(2) 一般解の形

再帰関係の一般解は、

$$A^n = C_1 \cdot 4^n + C_2 \cdot 1^n$$

ここで、 C_1, C_2 は定数行列です。

しかし、行列の場合は直接適用できないため、各べき乗行列 A^n を次のように表現します。

$$A^n = p_n A + q_n I$$

ここで、 p_n, q_n はスカラー係数であり、次の再帰関係を満たします。

$$\begin{cases} p_n = 5p_{n-1} - 4p_{n-2} \\ q_n = 5q_{n-1} - 4q_{n-2} \end{cases}$$

(3) 初期条件の設定

- $n = 0$ のとき：

$$A^0 = I = p_0 A + q_0 I \implies p_0 = 0, \quad q_0 = 1$$

- $n = 1$ のとき：

$$A^1 = A = p_1 A + q_1 I \implies p_1 = 1, \quad q_1 = 0$$

(4) 係数 p_n の一般項を求める

再帰関係：

$$p_n = 5p_{n-1} - 4p_{n-2}$$

特性方程式は同じなので、解は $r = 4, 1$ です。したがって、

$$p_n = \alpha \cdot 4^n + \beta \cdot 1^n$$

初期条件を用いて定数を求めます。

- $n = 0$ のとき：

$$p_0 = \alpha \cdot 4^0 + \beta \cdot 1^0 = \alpha + \beta = 0$$

- $n = 1$ のとき：

$$p_1 = \alpha \cdot 4^1 + \beta \cdot 1^1 = 4\alpha + \beta = 1$$

これらの連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

差を取ると、

$$(4\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = 1 - 0 \implies 3\alpha = 1 \implies \alpha = \frac{1}{3}$$

すると、

$$\beta = -\alpha = -\frac{1}{3}$$

したがって、

$$p_n = \frac{1}{3} \cdot 4^n - \frac{1}{3}$$

(5) 係数 q_n の一般項を求める

同様に、

$$q_n = \gamma \cdot 4^n + \delta \cdot 1^n$$

初期条件を用いて定数を求めます。

- $n = 0$ のとき：

$$q_0 = \gamma + \delta = 1$$

- $n = 1$ のとき：

$$q_1 = 4\gamma + \delta = 0$$

これらの連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} \gamma + \delta = 1 \\ 4\gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

差を取ると、

$$(4\gamma + \delta) - (\gamma + \delta) = 0 - 1 \implies 3\gamma = -1 \implies \gamma = -\frac{1}{3}$$

すると、

$$\delta = 1 - \gamma = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

したがって、

$$q_n = -\frac{1}{3} \cdot 4^n + \frac{4}{3}$$

(6) 一般式のまとめ

これで、

$$A^n = p_n A + q_n I = \left(\frac{1}{3} \cdot 4^n - \frac{1}{3} \right) A + \left(-\frac{1}{3} \cdot 4^n + \frac{4}{3} \right) I$$

5. A^{20} の計算

$n = 20$ を代入します。

(1) 係数の計算

- $p_{20} = \frac{1}{3} \cdot 4^{20} - \frac{1}{3}$
- $q_{20} = -\frac{1}{3} \cdot 4^{20} + \frac{4}{3}$

(2) A^{20} の表現

$$A^{20} = \left(\frac{1}{3} \cdot 4^{20} - \frac{1}{3} \right) A + \left(-\frac{1}{3} \cdot 4^{20} + \frac{4}{3} \right) I$$

(3) 共通因数を括り出す

$$A^{20} = \frac{1}{3} (4^{20} - 1) A + \frac{1}{3} (-4^{20} + 4) I = \frac{1}{3} (4^{20} - 1) A - \frac{1}{3} (4^{20} - 4) I$$

(4) さらに整理する

$$A^{20} = \frac{1}{3} (4^{20} - 1) A - \frac{1}{3} (4^{20} - 4) I$$

6. 数値を代入して最終的な答えを得る

具体的な数値を代入します。

(1) A と I を明示

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) A^{20} を計算

$$A^{20} = \frac{1}{3} (4^{20} - 1) \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} (4^{20} - 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 行列を展開する

計算が複雑になるため、このままの形で A^{20} を表すことができます。

7. まとめ

ケーリー・ハミルトンの定理を用いて、行列の高次のべき乗を計算する手順は以下の通りです。

1. 特性多項式を求める： $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
2. ケーリー・ハミルトンの定理を適用する： $p(A) = 0$
3. 再帰関係を確立する： $A^n = c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \dots$
4. 一般項を求める：再帰関係の特性方程式を解いて一般項を導出する
5. 目的のべき乗を計算する：一般項に具体的な値を代入して計算する

$n \times n$ 正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ としたとき、
 $\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n$ という式は成り立ちますか？



12 秒の間、Thought ▾

答え：

はい、成り立ちます。

詳細な説明：

結論： $n \times n$ の正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると、行列式（デターミナント） $\det(A)$ はこれらの固有値の積に等しくなります。

$$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n$$

理由と証明：

1. 特性多項式と固有値の関係

行列 A の特性多項式 $p(\lambda)$ は次のように定義されます。

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

この特性多項式の根が行列 A の固有値 λ_i です。特性多項式は次の形になります。

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

2. 行列式と固有値の積

特性多項式を展開すると、最高次の項は $(-1)^n \lambda^n$ になります。定数項（ λ^0 の項）は次のようになります。

$$\text{定数項} = (-1)^n \det(A)$$

また、特性多項式の定数項は固有値の積に等しくなります。つまり、

$$p(0) = \det(A) = (-1)^n (\lambda_1)(\lambda_2) \dots (\lambda_n)$$

ここで、 $(-1)^n$ を両辺にかけると、

$$(-1)^n \det(A) = (\lambda_1)(\lambda_2) \dots (\lambda_n)$$

したがって、

$$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n$$

3. 具体的な証明

(a) 特性多項式の一般形

特性多項式は次のように因数分解できます。

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

(b) 定数項の取り出し

$\lambda = 0$ を代入すると、

$$p(0) = \det(A) = (-1)^n(-\lambda_1)(-\lambda_2) \dots (-\lambda_n) = (-1)^n(-1)^n(\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n)$$

ここで、 $(-1)^n \times (-1)^n = 1$ なので、

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n$$

注意点：

- **固有値の重複**：固有値が重複する場合（代数的重複度が2以上の場合）も、その重複度に応じて積に含めます。
- **複素数の固有値**：行列 A の成分が実数でも、固有値が複素数になる場合があります。しかし、複素数の固有値も含めて積を取ると、最終的に $\det(A)$ は実数になります。
- **行列の種類**：この関係は任意の正方行列に対して成り立ちます。行列が対角化可能であるかどうかには依存しません。

例：

例えば、3次正方行列 A の固有値が $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ であるとします。このとき、

$$\det(A) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

実際に行列 A の行列式を計算しても 30 になります。

まとめ：

- **結論**： $\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n$ は成り立ちます。
- **理由**：特性多項式の定数項が固有値の積に等しく、それが行列式と一致するためです。
- **適用範囲**：この関係は任意の $n \times n$ 正方行列に対して成り立ちます。

同様の状況で、
 $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ という式は成り立ちますか？



30 秒の間、Thought ▾

はい、成り立ちます。

詳細な説明：

結論： $n \times n$ の正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると、行列 A のトレース（対角和） $\text{Tr}(A)$ はこれらの固有値の和に等しくなります。

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

理由と証明：

1. 特性多項式と固有値の関係

行列 A の特性多項式 $p(\lambda)$ は次のように定義されます。

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

この特性多項式は、 λ の n 次の多項式であり、その根（固有値）は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ です。特性多項式を展開すると、

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$$

2. トレースと特性多項式の係数の関係

行列 A のトレース $\text{Tr}(A)$ は、対角要素の和です。一方、特性多項式の λ^{n-1} の係数は、行列 A のトレースに等しくなります。

特性多項式の一般形：

$$p(\lambda) = \lambda^n - (\text{Tr}(A))\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

3. 固有値の和とトレースの一致

特性多項式の λ^{n-1} の係数を比較すると、

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

となります。つまり、行列のトレースは固有値の和に等しいことがわかります。

注意点：

- **固有値の重複**：固有値が重複する場合は、その重複度を考慮して和に含めます（代数的重複度も考慮）。
 - **複素数の固有値**：行列 A の要素が実数であっても、固有値が複素数になる場合があります。その場合でも、複素共役な固有値がペアで現れるため、最終的なトレースは実数になります。
 - **行列の種類**：この関係は任意の正方行列に対して成り立ちます。行列が対角化可能かどうか、あるいは実対称行列かどうかには依存しません。
-

例：

例1：

3次正方行列 A の固有値が $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ の場合、

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 3 + 5 = 10$$

例2：

行列 A が次のように与えられているとします。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

この行列の固有値を計算すると、 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3$ となります。この場合、

$$\text{Tr}(A) = 2 + 4 = 6, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 3 + 3 = 6$$

確かにトレースと固有値の和が一致しています。

まとめ：

- **結論**： $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ は成り立ちます。
- **理由**：特性多項式の λ^{n-1} の係数が固有値の和に対応し、それが行列のトレースと一致するためです。
- **適用範囲**：この関係は任意の $n \times n$ 正方行列に対して成り立ちます。