実5次元空間 R^5 から実3次元空間 R^3 への線形写像 T が，R^5 の元 x に対して
係数行列 A =
(2 -1 1 5 0)
(1 3 4 -1 7)
(1 0 1 2 1)
を用いて T(x) = Ax と表される状況を考えます.
このとき，T の退化次数と ker(T) の基底を教えて下さい.

23 秒の間、Thought

問題の概要：

- 実数体上のベクトル空間 $\mathbb{R}^5$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 T が、行列 A を用いて $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と表される。
- 行列 A は次のように与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- このとき、T の **退化次数**（nullity） と **核空間 $\ker(T)$ の基底** を求める。

解答への手順：

1. **核空間 $\ker(T)$ を求めるために、方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解く。**
2. **行基本変形を用いて、未知数を表現する。**
3. **自由変数を決め、解の一般形を求める。**
4. **基底を求め、退化次数を計算する。**

ステップ1：方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の設定

未知数を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top$ とすると、以下の連立方程式を得る。

1. $2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 0x_5 = 0 \quad (1)$
2. $x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 7x_5 = 0 \quad (2)$
3. $x_1 + 0x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \quad (3)$

ステップ2：行基本変形による未知数の消去

(a) 方程式 (1) と (3) の差をとる

$$(2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4) - (x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 - x_2 + 0x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \quad (\mathrm{A})$$

(b) 方程式 (2) と (3) の差をとる

$$(x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 7x_5) - (x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5) = 0$$
$$\Rightarrow 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0$$
$$\Rightarrow 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \quad (\mathrm{B})$$

(c) 方程式 (A) から x_1 を表す

$$x_1 = x_2 - 3x_4 + x_5 \quad (1')$$

ステップ3：未知数の関係式の整理

(a) 方程式 (1') と (3) を連立して x_3 と x_2 の関係を得る

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\
\Rightarrow\ &(x_2 - 3x_4 + x_5) + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\
\Rightarrow\ &x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \quad (\mathrm{C})
\end{aligned}
$$

(b) 方程式 (B) を簡略化

まず、(B) を 2 で割る：

$$
x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 + 3x_5 = 0
$$

しかし、(C) と組み合わせるためにそのまま使います。

(c) 方程式 (B) と (C) を組み合わせて x_2, x_3 を消去

方程式 (B) を 1 とし、(C) を 2 倍して引き算：

$$
\begin{aligned}
(2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 6x_5) - 2(x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5) &= 0 \\
(2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 6x_5) - (2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5) &= 0 \\
(3x_3 - 2x_3) + (-3x_4 + 2x_4) + (6x_5 - 4x_5) &= 0 \\
x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \quad (\mathrm{D})&
\end{aligned}
$$

ステップ4：未知数を自由変数で表す

(a) 自由変数の選択

未知数 x_2, x_4, x_5 を自由変数とする。

(b) 方程式 (D) から x_3 を表す

$$
x_3 = x_4 - 2x_5
$$

(c) 方程式 (C) から x_2 と x_3 の関係を確認

$$
\begin{aligned}
&x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\
\Rightarrow\ &x_2 + (x_4 - 2x_5) - x_4 + 2x_5 = 0 \\
\Rightarrow\ &x_2 = 0
\end{aligned}
$$

したがって、$x_2 = 0$ となり、自由変数は x_4, x_5 のみとなります。

(d) x_1 の表現

$$
x_1 = x_2 - 3x_4 + x_5 = -3x_4 + x_5
$$

ステップ5：解の一般形と基底の決定

(a) 解の一般形

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) 核空間の基底

核空間 $\ker(T)$ の基底は次の2つのベクトルです。

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) 退化次数の計算

自由変数の数は **2** つなので、退化次数（核空間の次元）は **2** です。

答え：

1. T **の退化次数は 2 である。**
2. $\ker(T)$ **の基底は以下の2つのベクトルである：**

$$\ker(T) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

補足：

- 行列 A のランクは $\operatorname{rank}(A) = 3$ で、元の空間の次元が 5 なので、退化次数は $5 - 3 = 2$ となります。
- 核空間の次元（退化次数）が 2 であることから、2 つのベクトルが基底を形成します。

まとめ：

- T **の退化次数は 2 です。**
- $\ker(T)$ **の基底は以下のベクトルです：**

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

いえ，その解答は正しくありません．T の退化次数は 3になります．もう一度考えて下さい．

27 秒の間、Thought

お詫びと訂正：

申し訳ありません、前回の解答に誤りがありました。正しい解答を以下に示します。

問題の概要：

- ベクトル空間 $\mathbb{R}^5$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 T が、行列 A を用いて $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と表される。
- 行列 A は次のように与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

目標：

- **T の退化次数（核空間の次元）を求める。**
- **$\ker(T)$ の基底を求める。**

解答：

ステップ1：方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を立てる

未知数を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top$ とすると、以下の連立方程式が得られます。

1. $2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 0x_5 = 0 \quad (1)$
2. $x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 7x_5 = 0 \quad (2)$
3. $x_1 + 0x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \quad (3)$

ステップ2：行基本変形を用いて連立方程式を解く

(a) 方程式 (1) と (3) を用いて x_1 を消去

方程式 (1) から (3) を引きます：

$$(2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4) - (x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5) = 0 - 0$$

計算すると：

$$\begin{gathered}(2x_1 - x_1) - x_2 + x_3 - x_3 + 5x_4 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ \Rightarrow x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 = 0 \quad (\mathrm{A})\end{gathered}$$

(b) 方程式 (2) と (3) を用いて x_1 を消去

方程式 (2) から (3) を引きます：

$$(x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 7x_5) - (x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5) = 0 - 0$$

計算すると：

$$\begin{gathered}(3x_2 + 4x_3 - x_4 + 7x_5) - (x_3 + 2x_4 + x_5) = 0 \\ \Rightarrow 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \quad (\mathrm{B})\end{gathered}$$

(c) 方程式 (A) から x_1 を表す

$$x_1 = x_2 - 3x_4 + x_5 \quad (1')$$

ステップ3：未知数を整理する

(a) 方程式 (1') を (3) 式に代入

$$(x_2 - 3x_4 + x_5) + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

計算すると：

$$x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \quad (\mathrm{C})$$

(b) 方程式 (B) と (C) を用いて x_2, x_3 を解く

方程式 (B) と (C) を整理します。

(C) 式を書き換え：

$$x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \quad (\mathrm{C})$$

(B) 式をそのまま：

$$3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \quad (\mathrm{B})$$

(c) 方程式 (B) と (C) を用いて x_2 を消去

まず、(C) 式を 3 倍します：

$$3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \quad (\mathrm{C'})$$

(C') 式と (B) 式を比較すると、両方とも同じ式になります。

したがって、(B) と (C) は同じ情報を持つことがわかります。

ステップ4：未知数を自由変数で表す

(a) 自由変数の選択

未知数 x_4, x_5 を自由変数とします。

(b) 方程式 (C) から x_3 を表す

$$\begin{gathered} x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ \Rightarrow x_3 = -x_2 + x_4 - 2x_5 \quad (2') \end{gathered}$$

(c) 方程式 (B) から x_2 を表す

$$3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0$$

x_3 に (2') を代入します：

$$\begin{gathered} 3x_2 + 3(-x_2 + x_4 - 2x_5) - 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ \Rightarrow 3x_2 - 3x_2 + 3x_4 - 6x_5 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ \Rightarrow 0 = 0 \end{gathered}$$

恒等式が得られるため、x_2 は自由変数となります。

(d) 方程式 (1') から x_1 を表す

$$x_1 = x_2 - 3x_4 + x_5$$

ステップ5：解の一般形を求める

自由変数は x_2, x_4, x_5 で、x_1, x_3 をこれらで表します。

(a) x_3 の表現

$$x_3 = -x_2 + x_4 - 2x_5$$

(b) 解ベクトルの一般形

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ステップ6：核空間の基底と退化次数を決定する

(a) 核空間の基底

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) 退化次数

自由変数の数は **3** つなので、退化次数（核空間の次元）は **3** です。

答え：

1. **T の退化次数は 3 である。**
2. **$\ker(T)$ の基底は以下の3つのベクトルである：**

$$\ker(T) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

補足：

- 行列 A のランクは **2** であり、元の空間の次元が 5 なので、退化次数は $5 - 2 = 3$ となります。
- 核空間の次元（退化次数）が 3 であることから、3 つのベクトルが基底を形成します。

結論：

- **T の退化次数は 3 です。**
- **$\ker(T)$ の基底は以下のベクトルです：**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

行列の簡約化はできますか？

5 秒の間、Thought

はい、行列の簡約化を行うことができます。具体的な行列を示していただければ、その行列の簡約化や必要な計算をお手伝いできます。

では，実5次元空間 R^5 から実3次元空間 R^3 への線形写像 T が，R^5 の元 x に対して
係数行列 A =
(2 -1 1 5 0)
(1 3 4 -1 7)
(1 0 1 2 1)
を用いて T(x) = Ax と表される状況を考え，このとき，T の退化次数と ker(T) の基底を答える問題で，途中の計算で簡約化を使って答えて下さい.

27 秒の間、Thought

問題の再掲：

実5次元空間 $\mathbb{R}^5$ から実3次元空間 $\mathbb{R}^3$ への線形写像 T が、$\mathbb{R}^5$ の元 $\mathbf{x}$ に対して、係数行列 A を用いて

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

と表される状況を考えます。行列 A は次のように与えられます。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき、T の**退化次数（核空間の次元）**と$\ker(T)$ **の基底**を求めてください。

解答：

ステップ1：方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を立てる

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top$ とします。まず、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて、$\ker(T)$ を求めます。

ステップ2：拡大係数行列を作成する

$$(A \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ステップ3：行基本変形を用いて行列を簡約化する

(1) 行の入れ替え

先頭のピボットを1にするために、行1と行2を交換します。

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(2) 列1の下の要素を0にする

- **行2**：$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$

$$R_2 = (2, -1, 1, 5, 0) - 2 \times (1, 3, 4, -1, 7) = (0, -7, -7, 7, -14)$$

- **行3**：$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

$$R_3 = (1, 0, 1, 2, 1) - (1, 3, 4, -1, 7) = (0, -3, -3, 3, -6)$$

簡約化後の行列：

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 7 & -14 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

(3) 行2のピボットを1にする

- **行2**：$R_2 \leftarrow (-1/7)R_2$

$$R_2 = (-1/7) \times (0, -7, -7, 7, -14) = (0, 1, 1, -1, 2)$$

(4) 列2の他の要素を0にする

- **行1**：$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$

$$R_1 = (1, 3, 4, -1, 7) - 3 \times (0, 1, 1, -1, 2) = (1, 0, 1, 2, 1)$$

- **行3**：$R_3 \leftarrow R_3 - (-3)R_2$（つまり $R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$）

$$R_3 = (0, -3, -3, 3, -6) + 3 \times (0, 1, 1, -1, 2) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

簡約化後の行列：

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(5) 列3の他の要素を0にする（ここでは不要）

既に列3のピボット以外の要素は0なので、このステップは省略できます。

ステップ4：連立方程式を解く

簡約化された行列から、対応する方程式を得ます。

- **行1**：

$$x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \quad (1)$$

- **行2**：

$$x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \quad (2)$$

- **行3**：

$$0 = 0 \quad (\text{恒等式})$$

ステップ5：未知数を自由変数と従属変数に分ける

自由変数を x_3, x_4, x_5 とします。従属変数 x_1, x_2 をこれらで表します。

(1) 方程式 (2) から x_2 を求める

$$x_2 = -x_3 + x_4 - 2x_5$$

(2) 方程式 (1) から x_1 を求める

$$x_1 = -x_3 - 2x_4 - x_5$$

ステップ6：解の一般形を求める

解ベクトル $\mathbf{x}$ は次のように表せます。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ステップ7：核空間の基底と退化次数を決定する

(1) 核空間 $\ker(T)$ の基底

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) 退化次数（核空間の次元）

自由変数の数は **3** つなので、退化次数は **3** です。

答え：

1. T **の退化次数は 3 です。**
2. $\ker(T)$ **の基底は次の3つのベクトルです：**

$$\ker(T) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

補足：

- 行列 A のランクは **2** です（ピボットの数が2つだからです）。したがって、次元定理より

$$\text{退化次数} = \dim(\ker(T)) = n - \text{rank}(A) = 5 - 2 = 3$$

- 核空間の基底を求める際、自由変数に対応するベクトルを組み合わせて基底を構成しました。

まとめ：

- 行基本変形を用いて、連立方程式を解き、核空間 $\ker(T)$ の基底を求めました。
- 退化次数は 3 であり、これは自由変数の数と一致します。
- 最終的に、核空間の基底と退化次数を求めることができました。

変数 x の 3次以下多項式 f(x) に対する写像 T が T(f(x)) = 2f'(x) + 3f(x) となるとき，この T は線形写像でしょうか．理由とともに教えて下さい．

12 秒の間、Thought

解答：

問題：変数 x の3次以下多項式 $f(x)$ に対する写像 T が、$T(f(x)) = 2f'(x) + 3f(x)$ で定義されています。このとき、T は線形写像でしょうか。理由とともに説明してください。

答え：

はい、T は線形写像です。

理由：

線形写像であるためには、写像 T が以下の2つの条件を満たす必要があります。

1. **加法性（線形性の第一条件）**：

$$T(f(x) + g(x)) = T(f(x)) + T(g(x))$$

2. **斉次性（線形性の第二条件）**：

$$T(c \cdot f(x)) = c \cdot T(f(x)) \quad （任意のスカラー\ c）$$

これらの条件を順に確認します。

---

1. 加法性の確認：

任意の3次以下の多項式 $f(x),\ g(x)$ に対して、

$$\begin{aligned} T(f(x) + g(x)) &= 2(f(x) + g(x))' + 3(f(x) + g(x)) \\ &= 2\left(f'(x) + g'(x)\right) + 3f(x) + 3g(x) \\ &= (2f'(x) + 3f(x)) + (2g'(x) + 3g(x)) \\ &= T(f(x)) + T(g(x)) \end{aligned}$$

したがって、加法性が成り立ちます。

---

2. 斉次性の確認：

任意のスカラー c と3次以下の多項式 $f(x)$ に対して、

$$\begin{aligned} T(c \cdot f(x)) &= 2(c \cdot f(x))' + 3(c \cdot f(x)) \\ &= 2c \cdot f'(x) + 3c \cdot f(x) \\ &= c\left(2f'(x) + 3f(x)\right) \\ &= c \cdot T(f(x)) \end{aligned}$$

したがって、斉次性も成り立ちます。

結論：

T は加法性と斉次性の両方を満たすため、線形写像であると言えます。