ベクトル空間の次元の定義を教えて下さい.

思考時間: 数秒

ベクトル空間の次元とは、そのベクトル空間の**基底を構成するベクトルの個数**を指します。具体的には、ベクトル空間 V の次元は、V の任意の基底が持つベクトルの数であり、この数は全ての基底で共通です。

定義

ベクトル空間 V の次元は、以下のように定義されます。

- **有限次元の場合**：

  ベクトル空間 V が有限個のベクトルからなる基底を持つとき、V は**有限次元**であり、その次元は基底のベクトル数 n で表されます。つまり、

  $$\dim V = n$$

  ここで、n は V の任意の基底に含まれるベクトルの数です。

- **無限次元の場合**：

  ベクトル空間 V が有限個のベクトルからなる基底を持たない場合、V は**無限次元**と呼ばれます。

性質

- **一意性**：有限次元ベクトル空間では、全ての基底は同じ数のベクトルを含みます。つまり、基底の選び方によらず、次元は一定です。
- **最大の線形独立集合**：次元は、V における**最大の線形独立なベクトル集合の要素数**でもあります。
- **最小の生成集合**：次元は、V を生成するために必要な最小のベクトル数でもあります。

例

- $\mathbb{R}^n$ **の場合**：実数体上のベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の次元は n です。
- **多項式空間**：次数が最大 k の多項式全体の集合は、次元が $k+1$ のベクトル空間です。基底は $\{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$ となります。

まとめると、ベクトル空間の次元は、その空間の構造を理解する上で基本的な概念であり、基底のベクトル数によって決定されます。

ベクトル空間 V に対し，その元の集合 {v1, v2,..., vn} が V の基底であることの定義を教えて下さい.

思考時間: 6 秒

ベクトル空間 V において、元の集合 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ が V の**基底**であるとは、次の2つの条件を満たす場合を言います。

1. **線形独立であること**：

   集合 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ のベクトルが線形独立である。つまり、スカラー $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対して、

   $$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

   が成り立つとき、全てのスカラーがゼロでなければならない：

   $$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

2. **全空間を張ること（生成すること）**：

   ベクトル空間 V の任意の元 $\mathbf{v}$ は、これらのベクトルの線形結合として表すことができる。つまり、スカラー $d_1, d_2, \ldots, d_n$ が存在して、

   $$\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n$$

   が成り立つ。

まとめると、集合 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ がベクトル空間 V の基底であるための条件は：

- **線形独立性**：ベクトル間に非自明な線形関係がない。
- **空間の生成**：全てのベクトルがこれらのベクトルの線形結合で表せる。

これにより、基底はベクトル空間の構造を完全に捉えるための最小限の「部品」として機能します。

3次元空間 R^3 中のベクトルの集合 M = { (x,y,z) in R^3, ただし x+y+z = 1 } の次元数を定義することはできるでしょうか？

思考時間: 4 秒

はい、**集合 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ の次元数を定義することは可能です。**これはベクトル空間の次元とは異なりますが、**アフィン空間**としての次元を考えることで、M の次元を定義できます。

---

1. アフィン空間としての M

アフィン空間とは

- **アフィン空間**は、ベクトル空間の部分集合であり、ベクトル空間の平行移動（平行移動した部分空間）として定義されます。
- ベクトル空間の部分空間が原点を通るのに対し、アフィン空間は原点を通らない場合があります。

M の特徴

- M は $x + y + z = 1$ **という平面**であり、これは $\mathbb{R}^3$ の中で原点を通らない平面です。
- この平面は、**ベクトル空間ではなくアフィン平面**と呼ばれる概念に該当します。

---

2. M の次元の定義

アフィン空間の次元

- アフィン空間の次元は、その**対応するベクトル部分空間の次元**と同じです。
- M に平行なベクトル部分空間を考えることで、次元を定義できます。

対応するベクトル部分空間の特定

- **対応するベクトル部分空間**は、$x + y + z = 0$ を満たすベクトル全体の集合です。
- この集合は、原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面であり、**2次元のベクトル空間**です。

M の次元の結論

- したがって、M **はアフィン空間として次元 2 を持つ**と定義できます。
- これは、M が $\mathbb{R}^3$ 内の2次元の平面であることを反映しています。

3. 具体的な説明

M 内の任意の点の表現

- M 内の任意の点 (x, y, z) は、次のように表せます：

$$(x, y, z) = (x, y, 1 - x - y)$$

- これは、x と y を自由変数として、z をそれらの関数として表現しています。

パラメータ表示による次元の確認

- 自由変数が2つ（x, y）あるため、M は**2次元の集合**です。
- 別の見方として、基底ベクトルを以下のように取ることができます：

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (1, 0, -1) \\ \mathbf{v} = (0, 1, -1) \end{cases}$$

- 任意の $(x, y, z) \in M$ は、あるスカラー s, t を用いて：

$$(x, y, z) = (1/3, 1/3, 1/3) + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

と表せます。ここで $(1/3, 1/3, 1/3)$ は M 上の特定の点です。

幾何学的な解釈

- M は $\mathbb{R}^3$ 内の平面であり、その平面上の任意の点は2つの方向に沿って移動できます。
- したがって、M の次元は、その平面の持つ**自由度の数**であり、これは2です。

---

4. まとめ

- **ベクトル空間ではないが次元を持つ**：M はベクトル空間ではありませんが、アフィン空間として次元を定義できます。
- **次元は 2**：M は $\mathbb{R}^3$ 内の2次元の平面であり、次元は2です。

補足

- **ベクトル空間との違い**：ベクトル空間は必ず原点を含みますが、アフィン空間は原点を含まない場合があります。
- **次元の感覚**：次元は、その空間内で独立に動かせる方向の数と考えることができます。M では、x と y を独立に選べば z が決まるため、2次元となります。

結論として、$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ の次元数は2と定義できます。

5つの変数 x1, x2, x3, x4, x5 に対して V = {(x1, x2, x3, x4, x5), ただし x1-2x2+x3+2x4+3x5=0, 2x1-4x2+3x3+3x4+8x5=0 という関係式が成り立つ } であるとして，この V の次元数を教えて下さい.

思考時間: 15 秒

V の次元数を求めるために、与えられた線形方程式の連立方程式を解きます。

---

1. 問題の設定

集合 V は以下の条件を満たすベクトルから成ります。

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 & (1) \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 & (2) \end{cases}\}$$

---

2. 連立方程式の解法

(a) 方程式 (1) と (2) の整理

まず、方程式 (1) と (2) を使って未知数を整理します。

方程式 (1):

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \qquad (1)$$

方程式 (2):

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \qquad (2)$$

(b) 方程式の消去法

方程式 (2) から方程式 (1) の 2 倍を引いて、未知数を減らします。

$$\text{方程式 } (2) - 2 \times \text{方程式 } (1) :$$

計算します。

- **左辺:**

$$\begin{aligned} &(2x_1) - 2(x_1) \\ &+ (-4x_2) - 2(-2x_2) \\ &+ (3x_3) - 2(x_3) \\ &+ (3x_4) - 2(2x_4) \\ &+ (8x_5) - 2(3x_5) \end{aligned}$$

- **計算結果:**

$$\begin{aligned} &0x_1 \\ &+ 0x_2 \\ &+ (3x_3 - 2x_3) = x_3 \\ &+ (3x_4 - 4x_4) = -x_4 \\ &+ (8x_5 - 6x_5) = 2x_5 \end{aligned}$$

- **右辺:**

$$0 - 2 \times 0 = 0$$

新たな方程式:

$$x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \qquad (3)$$

3. 未知数の表現

(a) x_3 を x_4, x_5 で表す

方程式 (3) より、

$$x_3 = x_4 - 2x_5$$

(b) x_1 を x_2, x_4, x_5 で表す

方程式 (1) に x_3 の表現を代入します。

$$x_1 - 2x_2 + (x_4 - 2x_5) + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

整理すると、

$$x_1 - 2x_2 + x_4 - 2x_5 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

さらに簡単にすると、

$$x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 0$$

よって、

$$x_1 = 2x_2 - 3x_4 - x_5$$

---

4. 自由変数の選択

未知数 x_2, x_4, x_5 を自由変数とし、x_1, x_3 をこれらで表します。

- **x_1 の表現:**

$$x_1 = 2x_2 - 3x_4 - x_5$$

- **x_3 の表現:**

$$x_3 = x_4 - 2x_5$$

---

5. ベクトルのパラメータ表示

V の任意の元 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ は以下のように表せます。

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2(2, 1, 0, 0, 0) + x_4(-3, 0, 1, 1, 0) + x_5(-1, 0, -2, 0, 1)$$

---

6. 次元の決定

自由変数は x_2, x_4, x_5 の3つです。

したがって、集合 V の次元は **3 次元**です。

7. 基底の例

V の基底となるベクトルを3つ挙げます。

1. $\mathbf{v}_1$（$x_2 = 1$, 他は 0）

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 0, 0)$$

2. $\mathbf{v}_2$（$x_4 = 1$, 他は 0）

$$\mathbf{v}_2 = (-3, 0, 1, 1, 0)$$

3. $\mathbf{v}_3$（$x_5 = 1$, 他は 0）

$$\mathbf{v}_3 = (-1, 0, -2, 0, 1)$$

---

8. まとめ

- **次元数**：V の次元は **3** です。
- **理由**：自由に選べる変数が3つあるため。
- **基底**：上記の3つのベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は V の基底を形成します。

結論

集合 V の次元数は **3 次元**です。

m x n 行列を A として， n = rank(A) + dim(Ker(A)) が成り立ちますか？

思考時間: 11 秒

はい、**任意の $m \times n$ 行列 A に対して**

$$n = \mathrm{rank}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A))$$

が成り立ちます。

これは線形代数学における**ランク・ヌルリティ定理（Rank-Nullity Theorem）**と呼ばれる重要な結果です。

詳細な説明

1. 用語の定義

- **階数（Rank）$\mathrm{rank}(A)$：**

  行列 A の列ベクトル（または行ベクトル）が張る空間の次元です。これは線形変換 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の像（イメージ）の次元を表します。

- **核（Kernel）$\mathrm{Ker}(A)$：**

  行列 A による線形変換で零ベクトルに写されるベクトル全体の集合です。その次元 $\dim(\mathrm{Ker}(A))$ は**ヌル空間の次元**とも呼ばれます。

2. ランク・ヌルリティ定理

線形変換 $A : V \to W$ （ここで $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$）に対して、以下の等式が成り立ちます：

$$\dim(V) = \mathrm{rank}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A))$$

つまり、

$$n = \mathrm{rank}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A))$$

3. なぜこの等式が成り立つのか

- **線形変換の性質**：線形変換 A は、ベクトル空間 V をその像 $\mathrm{Im}(A)$ と核 $\mathrm{Ker}(A)$ に「分解」します。
- **次元の分配**：V の次元（n）は、A によって「失われない情報」（階数）と「失われる情報」（核の次元）の合計です。

具体的な例

例として、以下の行列 A を考えます：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

これは 2×4 の行列で、線形変換 $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を定めます。

ステップ 1：階数の計算

- 行列 A の行（または列）ベクトルの最大の線形独立な集合を探します。
- この場合、2 行は線形従属です（2 行目は 1 行目の 2 倍）。
- したがって、**階数** $\mathrm{rank}(A) = 1$ です。

ステップ 2：核の次元の計算

- 核 $\mathrm{Ker}(A)$ は、$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たすベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ の集合です。
- 連立方程式を解くと、自由変数が 3 つ存在します。
- したがって、$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3$ です。

ステップ 3：等式の確認

$$n = 4 = \mathrm{rank}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1 + 3$$

等式が成り立っています。

結論

したがって、任意の $m \times n$ 行列 A に対して

$$n = \mathrm{rank}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A))$$

が成り立ちます。

この等式は、線形代数学における基本的な結果であり、行列や線形変換の性質を理解する上で非常に重要です。

補足

- **実際の応用**：この定理は、連立一次方程式の解の個数や、線形システムの解の構造を調べる際に役立ちます。
- **一般化**：有限次元のベクトル空間だけでなく、無限次元のベクトル空間や他の数学的構造にも適用される場合があります。