

ベクトル空間 V の n 個の元からなる集合 U を考えます。

この U の元の適当な一次結合でやはり n 個のベクトルを作り、それからなる集合 W を構成した時、 U の次元と W の次元が異なるケースはあるでしょうか？
もしあるとしたらどういうケースでしょうか？



思考時間: 7 秒 ✓

はい、 U の元の適当な一次結合で新たに n 個のベクトルを作って集合 W を構成したとき、 U の張る部分空間の次元と W の張る部分空間の次元が異なる場合があります。

理由:

- **次元の減少:** U の元から線形結合を取る際、もし新たに作ったベクトルが線形従属になった場合、 W の張る部分空間の次元は U の張る部分空間の次元より小さくなります。例えば、 U が線形独立な n 個のベクトルから成る場合でも、全てのベクトルを 0 ベクトルに写すような線形結合を取れば、 W の次元は 0 になります。
- **次元の不変:** 一方、適切な線形結合（例えば、可逆な線形変換に対応するもの）を選べば、 U と W の張る部分空間の次元は同じになります。

結論:

- W の張る部分空間の次元は、 U の張る部分空間の次元以下になります。
- 次元が異なるケースは、 W を構成する際に線形従属性が導入された場合など、線形結合の取り方によります。

例:

- **次元が減少する場合:** U が $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ であり、 W を $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ 、 $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ 、 $\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ とすると、 W の張る部分空間は次元 1 になります。
- **次元が不変な場合:** U と W の間に可逆な線形変換が存在する場合、次元は不変です。

したがって、適切な線形結合の取り方によっては、 U の次元と W の次元が異なるケースがあります。

はい、あります。 U の元から線形従属を生じる一次結合で W を構成すると、 W の次元は U の次元より小さくなります。

行列の簡約化の手続きを行った場合、その行列の階数は変化する場合がありますか？



思考時間: 9 秒 ▾

行列の簡約化の手続きを正しく行った場合、その行列の**階数は変化しません**。これは、行列の簡約化（例えば、ガウス消去法や行列の階段形への変形）は、**行基本変形**（以下の3つ）を用いて行われるためです：

1. **行の交換**：2つの行を入れ替える。
2. **行のスカラー倍**：ある行を0でない定数倍する。
3. **行の加減**：ある行に他の行の定数倍を加える。

これらの行基本変形は、行列の行空間および列空間の線形関係を保つ操作であり、**行列の階数（線形独立な行または列の最大数）を不変にします**。

したがって、行基本変形のみを使用して行う行列の簡約化では、階数は変化しません。

注意点：

- **誤った操作**：もし行基本変形ではない操作（例えば、行や列の削除、行や列への依存する行や列の追加など）を行った場合、階数が変化する可能性があります。
- **数値計算上の誤差**：コンピュータで計算する場合、浮動小数点の丸め誤差により、階数が誤って計算されることがあります。

結論：

正しい簡約化手続きを行う限り、行列の階数は変化しません。

変数 x に対する3次以下の多項式の集合 $R[x]_3$ はベクトル空間です。

この元である

$$f_1(x) = 1 + x + 3x^2,$$

$$f_2(x) = 1 + 2x - x^3,$$

$$f_3(x) = 1 + 3x - 3x^2 - 2x^3,$$

$$f_4(x) = -2 - 4x + x^2 - x^3,$$

$$f_5(x) = -1 - 4x + 7x^2$$

の一次関係性を知りたいので、まず、このうち一次独立なベクトルで最大個数のものを教えて下さい。

そしてその次に、一次従属なベクトルが一次独立なベクトルのどのような一次結合で表されるか示して下さい。



思考時間: 48 秒 ✓

ベクトル空間 $R[x]_3$ における多項式の集合 $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ について、最大数の一次独立なベクトルを求め、その後に一次従属なベクトルを一次独立なベクトルの線形結合で表します。

1. ベクトルの表示

まず、各多項式をベクトルとして表します。標準基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に対する係数を列ベクトルとして書きます。

1. $f_1(x) = 1 + x + 3x^2$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $f_2(x) = 1 + 2x - x^3$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. $f_3(x) = 1 + 3x - 3x^2 - 2x^3$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. $f_4(x) = -2 - 4x + x^2 - x^3$

$$f_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. $f_5(x) = -1 - 4x + 7x^2$

$$f_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. 一次独立なベクトルの最大集合の決定

これらのベクトルの一次独立性を調べるため、線形結合による関係式を立てます。

(a) f_1, f_2, f_4 の一次独立性の確認

これら3つのベクトルについて、次の線形関係が成り立つと仮定します。

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_4 f_4 = 0$$

この等式を各成分ごとに分解します。

- 定数項 (x^0) :

$$a_1(1) + a_2(1) + a_4(-2) = 0$$

- x の係数:

$$a_1(1) + a_2(2) + a_4(-4) = 0$$

- x^2 の係数:

$$a_1(3) + a_2(0) + a_4(1) = 0$$

- x^3 の係数:

$$a_1(0) + a_2(-1) + a_4(-1) = 0$$

これらの連立方程式を解くと、唯一の解は $a_1 = a_2 = a_4 = 0$ となります。したがって、 f_1, f_2, f_4 は一次独立です。

(b) f_3 の一次従属性の確認

f_3 が f_1 と f_2 の線形結合で表せるか調べます。

線形関係を仮定します。

$$b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 = 0$$

各成分について:

- 定数項:

$$b_1(1) + b_2(1) + b_3(1) = 0$$

- x の係数:

$$b_1(1) + b_2(2) + b_3(3) = 0$$

- x^2 の係数:

$$b_1(3) + b_2(0) + b_3(-3) = 0$$

- x^3 の係数:

$$b_1(0) + b_2(-1) + b_3(-2) = 0$$

これらを解くと、

$$b_1 = b_3, \quad b_2 = -2b_3$$

となり、 b_3 を任意定数として

$$f_3 = -f_1 + 2f_2$$

となります。したがって、 f_3 は f_1 と f_2 の線形結合で表され、一次従属です。

(c) f_5 の一次従属性の確認

同様に、 f_5 が f_1, f_2, f_4 の線形結合で表せるか調べます。

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_4 f_4 + c_5 f_5 = 0$$

各成分について:

- 定数項:

$$c_1(1) + c_2(1) + c_4(-2) + c_5(-1) = 0$$

- x の係数:

$$c_1(1) + c_2(2) + c_4(-4) + c_5(-4) = 0$$

- x^2 の係数:

$$c_1(3) + c_2(0) + c_4(1) + c_5(7) = 0$$

- x^3 の係数:

$$c_1(0) + c_2(-1) + c_4(-1) + c_5(0) = 0$$

解くと、

$$c_5 = -c_4, \quad c_2 = -c_4, \quad c_1 = 2c_4$$

となり、

$$f_5 = 2f_1 - f_2 + f_4$$

となります。したがって、 f_5 も一次従属です。

3. 結論

- 一次独立な最大集合: $\{f_1, f_2, f_4\}$
- 一次従属なベクトルの表現:
 - $f_3 = -f_1 + 2f_2$
 - $f_5 = 2f_1 - f_2 + f_4$

したがって、与えられた多項式の集合から一次独立な最大個数のベクトルは3つであり、それは f_1, f_2, f_4 です。一次従属な f_3 と f_5 は、これらの一次独立なベクトルの線形結合で表されます。

f_1, f_2, f_4 が一次独立な最大個数のベクトルであることをどうやって求めたか教えてください。



思考時間: 52 秒 ✓

承知いたしました。以下では、 f_1, f_2, f_4 が一次独立な最大個数のベクトルであることを、詳細な計算手順を通して説明します。

ステップ 1: 多項式をベクトルとして表現

まず、与えられた多項式をベクトルとして表現します。次数が最大で 3 次なので、基底として $\{1, x, x^2, x^3\}$ を用います。

各多項式の係数を取り出して列ベクトルにします。

1. $f_1(x) = 1 + x + 3x^2$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $f_2(x) = 1 + 2x - x^3$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. $f_3(x) = 1 + 3x - 3x^2 - 2x^3$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. $f_4(x) = -2 - 4x + x^2 - x^3$

$$f_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. $f_5(x) = -1 - 4x + 7x^2$

$$f_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ステップ 2: 行列を作成

これらのベクトルを列として持つ行列 A を作成します。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ステップ 3: 行列の階段形への変形（ガウス消去法）

行列 A を行基本変形を用いて階段形に変形し、ピボット列（一次独立なベクトルに対応）を特定します。

手順:

1. ピボットの選択（第1列）

行 1 の第1列がピボット要素（1）です。他の行の第1列をゼロにします。

- 行 2 から行 1 を引く：

$$\text{行2} = \text{行2} - \text{行1} \implies [0, 1, 2, -2, -3]$$

- 行 3 から 3 倍の行 1 を引く：

$$\text{行3} = \text{行3} - 3 \times \text{行1} \implies [0, -3, -6, 7, 10]$$

2. ピボットの選択（第2列）

行 2 の第2列がピボット要素（1）です。他の行の第2列をゼロにします。

- 行 3 に 3 倍の行 2 を加える：

$$\text{行3} = \text{行3} + 3 \times \text{行2} \implies [0, 0, 0, 1, 1]$$

- 行 4 に行 2 を加える：

$$\text{行4} = \text{行4} + \text{行2} \implies [0, 0, 0, -3, -3]$$

3. ピボットの選択（第4列）

行 3 の第4列がピボット要素（1）です。他の行の第4列をゼロにします。

- 行 4 に 3 倍の行 3 を加える：

$$\text{行4} = \text{行4} + 3 \times \text{行3} \implies [0, 0, 0, 0, 0]$$

4. 結果の行列

変形後の行列は以下のようになります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ピボット列は第1列（ f_1 ）、第2列（ f_2 ）、第4列（ f_4 ）です。

ステップ 4: 一次独立なベクトルの特定

ピボット列に対応するベクトル f_1, f_2, f_4 は一次独立であることがわかります。

ステップ 5: 一次従属なベクトルの表現

次に、残りのベクトル f_3 と f_5 が f_1, f_2, f_4 の線形結合で表せることを示します。

線形方程式の設定

行列の変形結果から、以下の連立方程式が得られます（未知数は c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 ）：

1. 行 1 より：

$$c_1 + c_2 + c_3 - 2c_4 - c_5 = 0$$

2. 行 2 より：

$$c_2 + 2c_3 - 2c_4 - 3c_5 = 0$$

3. 行 3 より：

$$c_4 + c_5 = 0$$

未知数の解法

まず、式 (3) から：

$$c_4 = -c_5$$

これを式 (1) と (2) に代入します。

式 (1) に代入：

$$c_1 + c_2 + c_3 - 2(-c_5) - c_5 = 0 \implies c_1 + c_2 + c_3 + 2c_5 - c_5 = 0 \implies c_1 + c_2 + c_3 + c_5 = 0$$

式 (2) に代入：

$$c_2 + 2c_3 - 2(-c_5) - 3c_5 = 0 \implies c_2 + 2c_3 + 2c_5 - 3c_5 = 0 \implies c_2 + 2c_3 - c_5 = 0$$

未知数を整理：

• 式 (4)：

$$c_1 = -c_2 - c_3 - c_5$$

• 式 (5)：

$$c_2 = -2c_3 + c_5$$

これを式 (4) に代入すると：

$$c_1 = -(-2c_3 + c_5) - c_3 - c_5 = 2c_3 - c_5 - c_3 - c_5 = c_3 - 2c_5$$

結論：

未知数は以下のように表されます。

$$\begin{cases} c_1 = c_3 - 2c_5 \\ c_2 = -2c_3 + c_5 \\ c_3 = c_3 \\ c_4 = -c_5 \\ c_5 = c_5 \end{cases}$$

c_3 と c_5 は任意の定数です。

ステップ 6: f_3 と f_5 の表現

(a) f_3 の場合 ($c_5 = 0$)

$c_5 = 0$ とすると：

$$\begin{cases} c_1 = c_3 \\ c_2 = -2c_3 \\ c_3 = c_3 \\ c_4 = 0 \\ c_5 = 0 \end{cases}$$

よって、非自明な解は $c_3 \neq 0$ の場合であり：

$$c_1 = c_3, \quad c_2 = -2c_3$$

これを線形結合として書くと：

$$c_3(f_1 - 2f_2 + f_3) = 0$$

したがって：

$$f_3 = -f_1 + 2f_2$$

(b) f_5 の場合 ($c_3 = 0$)

$c_3 = 0$ とすると：

$$\begin{cases} c_1 = -2c_5 \\ c_2 = c_5 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = -c_5 \\ c_5 = c_5 \end{cases}$$

$c_5 \neq 0$ の場合、線形結合は：

$$c_5(-2f_1 + f_2 - f_4 + f_5) = 0$$

したがって：

$$f_5 = 2f_1 - f_2 + f_4$$

ステップ 7: 最大の一次独立なベクトル数の確定

以上の計算から、以下がわかります。

- 一次独立なベクトル: f_1, f_2, f_4
- 一次従属なベクトル:
 - $f_3 = -f_1 + 2f_2$
 - $f_5 = 2f_1 - f_2 + f_4$

最大の一次独立なベクトル数が 3 である理由:

- ベクトル空間 $R[x]_3$ の次元は 4 ですが、与えられた 5 つのベクトルの中で互いに一次独立なものは最大で 4 つです。
 - しかし、計算の結果、 f_1, f_2, f_4 の 3 つのみが一次独立であり、他の 2 つはこれらの線形結合で表されます。
 - 行列 A のランクは 3 であり、これは一次独立な列ベクトルの最大数を示しています。
-

まとめ

- 一次独立な最大個数のベクトル: f_1, f_2, f_4
- 一次従属なベクトルの表現:
 - $f_3 = -f_1 + 2f_2$
 - $f_5 = 2f_1 - f_2 + f_4$

結論として、行基本変形と連立方程式の解法を通じて、 f_1, f_2, f_4 が一次独立な最大集合であることを求めました。

以上が、 f_1, f_2, f_4 が一次独立な最大個数のベクトルであることを求めた詳細な手順です。