

3x3行列を
(6 -3 27)
(-3 2 -12)
(27 -12 126)
とし、ベクトル $\mathbf{b}$ を (9,-9, 27) としたとき、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を自由度も含めて答えて下さい。



13 秒の間、Thought ▾

連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を求めるために、以下の手順で解いていきます。

行列とベクトルの定義:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 27 \\ -3 & 2 & -12 \\ 27 & -12 & 126 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 27 \end{pmatrix}$$

連立方程式の展開:

- 1行目: $6x_1 - 3x_2 + 27x_3 = 9 \quad \dots \quad (1)$
- 2行目: $-3x_1 + 2x_2 - 12x_3 = -9 \quad \dots \quad (2)$
- 3行目: $27x_1 - 12x_2 + 126x_3 = 27 \quad \dots \quad (3)$

方程式の解法:

(2)式を2倍して(1)式と足し合わせます。

- (2)式 $\times 2$: $-6x_1 + 4x_2 - 24x_3 = -18$
- (1)式と足すと: $(6x_1 - 6x_1) + (-3x_2 + 4x_2) + (27x_3 - 24x_3) = 9 - 18$
- これにより、 $x_2 + 3x_3 = -9 \quad \dots \quad (4)$ を得ます。

次に、(1)式を4.5倍して(3)式と引き算します。

- (1)式 $\times 4.5$: $27x_1 - 13.5x_2 + 121.5x_3 = 40.5$
- (3)式 - 上記の式: $(27x_1 - 27x_1) + (-12x_2 + 13.5x_2) + (126x_3 - 121.5x_3) = 27 - 40.5$
- これにより、 $x_2 + 3x_3 = -9 \quad \dots \quad (5)$ を再度得ます。

(4)式と(5)式より、 $x_2 = -9 - 3x_3 \quad \dots \quad (6)$

これを(1)式に代入します。

- $6x_1 - 3(-9 - 3x_3) + 27x_3 = 9$
- 展開すると: $6x_1 + 27 + 9x_3 + 27x_3 = 9$
- 整理すると: $6x_1 + 36x_3 = -18$
- 両辺を6で割ると: $x_1 + 6x_3 = -3 \quad \dots \quad (7)$

(7)式より、 $x_1 = -3 - 6x_3 \quad \dots \quad (8)$

最終的な解:

自由変数を t と置くと、

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 6t \\ x_2 = -9 - 3t \\ x_3 = t \end{cases}$$

したがって、解は1次元の自由度を持つ無限解であり、解集合は次のようになります。

答え:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 - 6t \\ -9 - 3t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \text{ は任意の実数}$$

つまり、解は1次元の自由度を持ちます。

答え:

解は $x_1 = -3 - 6t, x_2 = -9 - 3t, x_3 = t$ (t は任意の実数)。

したがって、解は1次元の自由度を持つ無限解です。

変数 x の3次以下多項式の集合を V とします。このとき、
 V に含まれる多項式 $f(x)$ で $df/dx(5)=0, f(3)=0$ を満たすものの集合を W とするとき、
 W は V の部分空間でしょうか？
もしもそうならば、 W の基底も教えて下さい。



19 秒の間、Thought ▾

解答へのアプローチ:

まず、3次以下の多項式全体の集合 V を考えます。これは、次数が高々3の多項式全体からなる4次元のベクトル空間です。

次に、 V の要素 $f(x)$ で、以下の条件を満たすものの集合 W を定義します。

- 1. $f(3) = 0$
- 2. $f'(5) = 0$

これらの条件を満たす $f(x)$ の集合 W が V の部分空間であるかどうかを検討し、もしそうであれば、その基底を求めます。

1. W は V の部分空間か？

部分空間であるための条件は以下の3つです。

- 非空： W は少なくとも一つの元を含む。
- 加法について閉じている：任意の $f, g \in W$ に対して、 $f + g \in W$ 。
- スカラー倍について閉じている：任意の $f \in W$ とスカラー c に対して、 $cf \in W$ 。

(a) 非空性の確認:

零多項式 $f(x) = 0$ は明らかに $f(3) = 0$ かつ $f'(5) = 0$ を満たすので、 W は非空です。

(b) 加法についての閉性:

$f, g \in W$ とすると、

- $(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0$
- $(f + g)'(5) = f'(5) + g'(5) = 0 + 0 = 0$

よって、 $f + g \in W$ 。

(c) スカラー倍についての閉性:

$f \in W$ とスカラー c に対して、

- $(cf)(3) = c \cdot f(3) = c \cdot 0 = 0$
- $(cf)'(5) = c \cdot f'(5) = c \cdot 0 = 0$

よって、 $cf \in W$ 。

以上より、 W は V の部分空間です。

2. W の基底の求め方

W は V の部分空間であり、 V の次元は4です。 W は2つの独立な線形条件で定義されているので、 W の次元は $4 - 2 = 2$ になります。

一般的な3次以下の多項式を設定します:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

条件を適用します:

1. $f(3) = 0$:

$$a \cdot 27 + b \cdot 9 + c \cdot 3 + d = 0 \quad (1)$$

2. $f'(5) = 0$:

まず、 $f'(x)$ を計算します。

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

そして、 $x = 5$ を代入します。

$$3a \cdot 25 + 2b \cdot 5 + c = 0 \quad (2)$$

連立方程式を解きます:

式 (2) を整理すると、

$$75a + 10b + c = 0 \quad (2')$$

式 (1) を整理すると、

$$27a + 9b + 3c + d = 0 \quad (1')$$

未知数を解きます:

c と d を a と b の式で表します。

- 式 (2') から、

$$c = -75a - 10b \quad (3)$$

- 式 (1') に (3) を代入すると、

$$27a + 9b + 3(-75a - 10b) + d = 0$$

- 整理すると、

$$\begin{aligned} 27a + 9b - 225a - 30b + d &= 0 \\ (-198a - 21b) + d &= 0 \end{aligned}$$

- したがって、

$$d = 198a + 21b \quad (4)$$

基底の構成:

a と b を独立変数と見なし、 c と d を (3) と (4) を用いて表現します。

- 第1の基底ベクトル: $a = 1, b = 0$

$$c = -75 \cdot 1 - 10 \cdot 0 = -75$$

$$d = 198 \cdot 1 + 21 \cdot 0 = 198$$

$$f_1(x) = x^3 - 75x + 198$$

- 第2の基底ベクトル: $a = 0, b = 1$

$$c = -75 \cdot 0 - 10 \cdot 1 = -10$$

$$d = 198 \cdot 0 + 21 \cdot 1 = 21$$

$$f_2(x) = x^2 - 10x + 21$$

確認:

各基底ベクトルが条件を満たすか確認します。

- $f_1(x)$ の場合:

$$f_1(3) = (3)^3 - 75 \cdot 3 + 198 = 27 - 225 + 198 = 0$$

$$f_1'(x) = 3x^2 - 75$$

$$f_1'(5) = 3 \cdot 25 - 75 = 75 - 75 = 0$$

- $f_2(x)$ の場合:

$$f_2(3) = (3)^2 - 10 \cdot 3 + 21 = 9 - 30 + 21 = 0$$

$$f_2'(x) = 2x - 10$$

$$f_2'(5) = 2 \cdot 5 - 10 = 10 - 10 = 0$$

両方とも条件を満たしています。

答え:

W は V の部分空間であり、その基底は次の2つの多項式です。

$$\begin{cases} f_1(x) = x^3 - 75x + 198 \\ f_2(x) = x^2 - 10x + 21 \end{cases}$$

したがって、 W の基底は $\{x^3 - 75x + 198, x^2 - 10x + 21\}$ です。

結論:

- W は V の部分空間である。
- W の基底は $\{x^3 - 75x + 198, x^2 - 10x + 21\}$ である。

3つのベクトル $\{u_1, u_2, u_3\}$ が一次独立で、ベクトル v_1, v_2, v_3 が
 $v_1 = 2u_1 + u_2 - 3u_3$,
 $v_2 = u_1 - u_2$,
 $v_3 = u_1 + 2u_2 + 3u_3$
という関係にあります。このとき、 $\{v_1, v_2, v_3\}$ は一次独立か一次従属か
教えてください。

与えられた3つのベクトル $\{v_1, v_2, v_3\}$ が一次独立か一次従属かを確認するために、これらのベクトルがスカラーの線形結合でゼロベクトルになるかどうかを調べます。つまり、次の式を解きます。

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \mathbf{0}$$

この式が、 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外の解を持たない場合、 $\{v_1, v_2, v_3\}$ は一次独立であり、そうでなければ一次従属です。

ステップ1：ベクトル v_1, v_2, v_3 の定義

ベクトル v_1, v_2, v_3 は、ベクトル u_1, u_2, u_3 を用いて次のように表されています：

$$v_1 = 2u_1 + u_2 - 3u_3$$

$$v_2 = u_1 - u_2$$

$$v_3 = u_1 + 2u_2 + 3u_3$$

ステップ2：線形結合 $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \mathbf{0}$ を展開

これらの関係を用いて、式 $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \mathbf{0}$ を展開します。

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = c_1(2u_1 + u_2 - 3u_3) + c_2(u_1 - u_2) + c_3(u_1 + 2u_2 + 3u_3)$$

これを各ベクトル u_1, u_2, u_3 の係数に注目して整理します。

1. u_1 の係数：

$$2c_1 + c_2 + c_3$$

2. u_2 の係数：

$$c_1 - c_2 + 2c_3$$

3. u_3 の係数：

$$-3c_1 + 3c_3$$

この線形結合がゼロベクトルになるためには、各係数がすべてゼロでなければなりません。したがって、次の連立方程式を解きます：

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$c_1 - c_2 + 2c_3 = 0$$

$$-3c_1 + 0 \cdot c_2 + 3c_3 = 0$$

ステップ3：連立方程式を解く

これらの方程式を解いていきます。

1. 第3式 $-3c_1 + 3c_3 = 0$ から、 $c_1 = c_3$ となります。

2. これを第1式に代入すると：

$$2c_1 + c_2 + c_1 = 0 \Rightarrow 3c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -3c_1$$

3. したがって、すべての c_1, c_2, c_3 は c_1 を使って次のように表されます：

$$c_1 = t, \quad c_2 = -3t, \quad c_3 = t$$

ただし、 t は任意のスカラーです。

したがって、 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外の解が存在するので、 $\{v_1, v_2, v_3\}$ は一次従属です。

結論

ベクトル $\{v_1, v_2, v_3\}$ は一次従属です。

その方法だと第2式を無視していると思います。もう一度考えて下さい。

ご指摘ありがとうございます。第2式を無視せず、連立方程式をしっかりと解き直して、 $\{v_1, v_2, v_3\}$ が一次独立か一次従属かを再確認します。

ステップ1：与えられたベクトルの定義

再度、ベクトル v_1, v_2, v_3 をベクトル u_1, u_2, u_3 で表すと、

$$v_1 = 2u_1 + u_2 - 3u_3$$

$$v_2 = u_1 - u_2$$

$$v_3 = u_1 + 2u_2 + 3u_3$$

ステップ2：線形結合 $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = \mathbf{0}$ の展開

3つのベクトルの線形結合がゼロベクトルになると仮定して、

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = \mathbf{0}$$

を展開して、各ベクトル u_1, u_2, u_3 の係数に注目します。

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = c_1(2u_1 + u_2 - 3u_3) + c_2(u_1 - u_2) + c_3(u_1 + 2u_2 + 3u_3)$$

これを整理すると、各ベクトルに対する係数が次のようになります。

- u_1 の係数：

$$2c_1 + c_2 + c_3$$

- u_2 の係数：

$$c_1 - c_2 + 2c_3$$

- u_3 の係数：

$$-3c_1 + 3c_3$$

これらの係数がゼロベクトルであるためには、次の連立方程式が成り立つ必要があります。

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$c_1 - c_2 + 2c_3 = 0$$

$$-3c_1 + 0 \cdot c_2 + 3c_3 = 0$$

ステップ3：連立方程式の解法

これらの方程式を順番に解いていきます。

1. 第3式 $-3c_1 + 3c_3 = 0$ より、

$$c_1 = c_3$$

2. この結果を第1式に代入します。

$$2c_1 + c_2 + c_1 = 0 \Rightarrow 3c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -3c_1$$

3. 最後に、第2式に $c_1 = c_3$ と $c_2 = -3c_1$ を代入して確認します。

$$c_1 - (-3c_1) + 2c_1 = 0$$

$$c_1 + 3c_1 + 2c_1 = 0$$

$$6c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

4. $c_1 = 0$ を第1式および第3式に代入すると、 $c_2 = 0$ および $c_3 = 0$ も成り立ちます。

結論

連立方程式の解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみであるため、 $\{v_1, v_2, v_3\}$ は**一次独立**です。

変数 x の 2 次以下多項式の集合を V とします。このとき、 V に含まれる以下の 5 つの多項式 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 があります。

$$f_1 = -1 + 4x + 6x^2,$$

$$f_2 = -2 + 3x + 7x^2,$$

$$f_3 = 1 + 2x + x^2,$$

$$f_4 = 1 + 2x,$$

$$f_5 = 1 + x + 2x^2.$$

このとき、以下の問いに答えて下さい。

問1. この5つの多項式の中で一次独立なものの最大個数 r を教えて下さい。

問2. 前の方から r 個の一次独立な多項式を教えて下さい。

問3. 残りの $(5-r)$ 個の一次従属な多項式を、問2の答えの多項式による一次結合で示して下さい。



1m 0sの間、Thought ▾

問題の概要:

- ベクトル空間 V : 変数 x の 2 次以下の多項式全体の集合。
- 多項式の集合 : f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 は V の要素。
 - $f_1 = -1 + 4x + 6x^2$
 - $f_2 = -2 + 3x + 7x^2$
 - $f_3 = 1 + 2x + x^2$
 - $f_4 = 1 + 2x$
 - $f_5 = 1 + x + 2x^2$

質問:

- これら5つの多項式の中で、一次独立なものの最大個数 r はいくつか。
- 前から順に r 個の一次独立な多項式を挙げよ。
- 残りの $(5 - r)$ 個の多項式を、2の答えの多項式による一次結合で表せ。

解答:

問1. 一次独立な多項式の最大個数 r を求める

ステップ1: ベクトルとしての表現

まず、各多項式をベクトルとして表現します。基底を $\{1, x, x^2\}$ とすると、各多項式は以下のように表されます。

$$\bullet f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet f_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



ステップ2: 一次独立性の検証

ベクトル空間 V の次元は3です。したがって、最大で3つの一次独立なベクトルが存在し得ます。

(a) f_1, f_2, f_3 の一次独立性

これらのベクトルが一次独立かを確認します。

線形結合 $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = \mathbf{0}$ が $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外に解があるか調べます。

連立方程式:

$$\begin{cases} -c_1 - 2c_2 + c_3 = 0 & (\text{定数項}) \\ 4c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 0 & (x \text{ の係数}) \\ 6c_1 + 7c_2 + c_3 = 0 & (x^2 \text{ の係数}) \end{cases}$$

解法:

- 第1式から $c_3 = c_1 + 2c_2$ を得る。
- これを第2式と第3式に代入。
- 新たな2つの式から c_1, c_2 を解く。
- 計算の結果、 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が唯一の解となる。

結論:

f_1, f_2, f_3 は一次独立。

(b) f_4 の追加による一次従属性の確認

次に、 f_4 を加えて f_1, f_2, f_3, f_4 の一次独立性を確認します。

線形結合 $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = \mathbf{0}$ を考えます。

連立方程式:

$$\begin{cases} -c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ 4c_1 + 3c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 0 \\ 6c_1 + 7c_2 + c_3 + 0c_4 = 0 \end{cases}$$

計算の結果、 c_1, c_2, c_3, c_4 に非自明な解が存在し、 f_1, f_2, f_3, f_4 は一次従属となります。

結論:

最大の一次独立な多項式の個数は 3 です。

問2. 前から順に r 個の一次独立な多項式

最初の3つの多項式 f_1, f_2, f_3 が一次独立です。

問3. 残りの多項式を一次結合で表す

(a) f_4 を f_1, f_2, f_3 の一次結合で表す

線形結合 $f_4 = a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$ を考えます。

連立方程式:

$$\begin{cases} 1 = -a_1 - 2a_2 + a_3 \\ 2 = 4a_1 + 3a_2 + 2a_3 \\ 0 = 6a_1 + 7a_2 + a_3 \end{cases}$$

解法:

- 第1式から $a_3 = 1 + a_1 + 2a_2$ 。
- これを第2式と第3式に代入。
- 新たな2つの式を解くと、 $a_1 = \frac{7}{5}$, $a_2 = -\frac{6}{5}$ 。
- 第1式から $a_3 = 0$ 。

結果:

$$f_4 = \frac{7}{5}f_1 - \frac{6}{5}f_2$$

(b) f_5 を f_1, f_2, f_3 の一次結合で表す

線形結合 $f_5 = b_1f_1 + b_2f_2 + b_3f_3$ を考えます。

連立方程式:

$$\begin{cases} 1 = -b_1 - 2b_2 + b_3 \\ 1 = 4b_1 + 3b_2 + 2b_3 \\ 2 = 6b_1 + 7b_2 + b_3 \end{cases}$$

解法:

- 第1式から $b_3 = 1 + b_1 + 2b_2$ 。
- これを第2式と第3式に代入。
- 新たな2つの式を解くと、 $b_1 = -\frac{16}{5}$, $b_2 = \frac{13}{5}$ 。
- 第1式から $b_3 = 3$ 。

結果:

$$f_5 = -\frac{16}{5}f_1 + \frac{13}{5}f_2 + 3f_3$$

まとめ:

- 問1の答え: 一次独立な多項式の最大個数 $r = 3$ 。
- 問2の答え: 最初の3つの多項式 f_1, f_2, f_3 が一次独立。
- 問3の答え:

- $f_4 = \frac{7}{5}f_1 - \frac{6}{5}f_2$

- $f_5 = -\frac{16}{5}f_1 + \frac{13}{5}f_2 + 3f_3$

最終的な答え:

1. 一次独立な多項式の最大個数 $r = 3$ です。
2. 前から順に一次独立な多項式は f_1, f_2, f_3 です。
3. 残りの多項式は以下のように表されます:

- $f_4 = \frac{7}{5}f_1 - \frac{6}{5}f_2$

- $f_5 = -\frac{16}{5}f_1 + \frac{13}{5}f_2 + 3f_3$

3x5行列 A を
(1 1 1 -1 -2)
(2 2 1 4 3)
(0 1 2 6 7)
としたとき、 Ker(A) を求めて下さい。
また、 Ker(A) の次元も教えて下さい。



24 秒の間、Thought ▾

問題の概要：

3×5行列 A が以下のように与えられています。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

このとき、線形方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間（核空間）である $\ker(A)$ を求め、さらにその次元を求めます。

解答への手順：

1. 拡大係数行列を作成する：

$$(A|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 7 & 0 \end{array} \right)$$

2. 行基本変形を行い、行列を階段行列（または行簡約形）に変換する。

ステップ1：行基本変形

- (1) 2行目を1行目で消去する：

- 操作：2行目 R_2 に $R_2 - 2R_1$ を代入。
- 計算：

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 = (2 - 2 \cdot 1, 2 - 2 \cdot 1, 1 - 2 \cdot 1, 4 - 2 \cdot (-1), 3 - 2 \cdot (-2), 0 - 2 \cdot 0) = (0, 0, -1, 6, 7, 0)$$

- (2) 1行目と3行目を用いて、1列目の要素を整理する。

- 3行目は1列目が0なので、そのままにします。

- (3) 1行目を使って、3行目の2列目を整理する：

- 操作：3行目 R_3 に $R_3 - R_1$ を代入。
- 計算：

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1 = (0 - 1, 1 - 1, 2 - 1, 6 - (-1), 7 - (-2), 0 - 0) = (-1, 0, 1, 7, 9, 0)$$

しかし、これは誤りです。なぜなら、3行目の1列目は既に0なので、この操作は不適切です。

代わりに、3行目はそのままにしておき、2列目をピボットとして用います。

- (4) 1行目の2列目を0にする：

- 操作：1行目 R_1 に $R_1 - R_3$ を代入。
- 計算：

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_3 = (1 - 0, 1 - 1, 1 - 2, -1 - 6, -2 - 7, 0 - 0) = (1, 0, -1, -7, -9, 0)$$

- (5) 2行目はそのままにします。

- (6) 3行目を使って、2行目の2列目を0にする。

- しかし、2行目の2列目は既に0なので、この操作は不要です。

ステップ2：2行目を整理する

(7) 2行目の3列目をピボットとして、1行目と3行目を整理する。

(7a) 1行目の3列目を0にする：

- 操作：1行目 R_1 に $R_1 - (-1) \times R_2$ を代入。

- 計算：

$$R_1 \leftarrow R_1 - (-1) \times R_2 = (1 - (-1) \cdot 0, 0 - (-1) \cdot 0, -1 - (-1) \cdot (-1), -7 - (-1) \cdot 6, -9 - (-1) \cdot 7, 0 - (-1) \cdot 0) = (1, 0, 0, -13, -16, 0)$$

(7b) 3行目の3列目を0にする：

- 操作：3行目 R_3 に $R_3 + 2 \times R_2$ を代入。

- 計算：

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2 \times R_2 = (0 + 2 \cdot 0, 1 + 2 \cdot 0, 2 + 2 \cdot (-1), 6 + 2 \cdot 6, 7 + 2 \cdot 7, 0 + 2 \cdot 0) = (0, 1, 0, 18, 21, 0)$$

ステップ3：整理後の行列

行基本変形の結果、行列は以下の形になります。

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -13 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 21 & 0 \end{array} \right)$$

ステップ4：方程式の表現

この行列から、それぞれの方程式を取り出します。

- 第1行：

$$x_1 - 13x_4 - 16x_5 = 0 \quad (1)$$

- 第2行：

$$-x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 0 \quad (2)$$

- 第3行：

$$x_2 + 18x_4 + 21x_5 = 0 \quad (3)$$

ステップ5：解の一般形を求める

自由変数を x_4, x_5 とします。

- (1)式より：

$$x_1 = 13x_4 + 16x_5$$

- (2)式より：

$$x_3 = 6x_4 + 7x_5$$

- (3)式より：

$$x_2 = -18x_4 - 21x_5$$

ステップ6：解ベクトルの表現

解ベクトル $\mathbf{x}$ は以下のようになります。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 13 \\ -18 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 16 \\ -21 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ステップ7：核空間の基底と次元

- 核空間 $\ker(A)$ の基底は以下の2つのベクトルです。

$$\begin{pmatrix} 13 \\ -18 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ -21 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 核空間の次元は、自由変数の数である 2 です。

答え：

1. $\ker(A)$ は以下のように表されます：

$$\ker(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \mathbf{x} = x_4 \begin{pmatrix} 13 \\ -18 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 16 \\ -21 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

2. 核空間の次元は 2 です。
-

補足：

- この結果から、行列 A のランクは $\text{rank}(A) = 3$ であり、行列の列数が5なので、次元定理より核空間の次元は $5 - 3 = 2$ となります。