Mini Test 03 (線形代数学 II)

実施日 2025.01.23

問 1． 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に Gram–Schmidt の直交化法を適用し，互いに直交し，かつそれぞれの長さが 1 となる 3 つのベクトルを求めよ．

問 2． $f, g \in \boldsymbol{R}_1[x]$ に対して内積を $(f, g) = \int_0^1 x f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$ とし，f に対するノルムを $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ とする．このとき，2 つのベクトル $f_1 = 1, f_2 = 1 + x$ に Gram–Schmidt の直交化法を適用し，互いに直交し，かつそれぞれの長さが 1 となる 2 つのベクトルを求めよ．

問 3． 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ を上三角化せよ．つまり，適切な正則行列 P を用意し，$P^{-1}AP$ が上三角行列になるようにせよ．なお,解答としてはそのときの P と $P^{-1}AP$ を答として解答せよ．

問 4． 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．つまり，適切な直交行列 P を用意し，$P^{\top}AP$ が対角行列になるようにせよ．なお，解答としてはそのときの P と AP を答として解答せよ．

問 5． 問 4 の行列 A に対し，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ として関数 $f(\boldsymbol{x})$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\top} A \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^{\top} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1$$

と定義する．

この関数 $f(\boldsymbol{x})$ に有限な最大値か最小値が存在するか調べよ．存在しないならば存在しないということとその根拠を，存在するならば,「最大値か最小値か」「そのときの $\boldsymbol{x}$ の値」「そのときの $f(\boldsymbol{x})$ の値」を解答として答えよ．

以上.

Mini Test 03 (線形代数学 II)

実施日 2025.01.23

問 1． 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に Gram–Schmidt の直交化法を適用し，互いに直交し，かつそれぞれの長さが 1 となる 3 つのベクトルを求めよ．

問 2． $f, g \in \boldsymbol{R}_1[x]$ に対して内積を $(f, g) = \int_0^1 x f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$ とし，f に対するノルムを $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ とする．このとき，2 つのベクトル $f_1 = 1, f_2 = 1 + x$ に Gram–Schmidt の直交化法を適用し，互いに直交し，かつそれぞれの長さが 1 となる 2 つのベクトルを求めよ．

問 3． 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ を上三角化せよ．つまり，適切な正則行列 P を用意し，$P^{-1}AP$ が上三角行列になるようにせよ．なお, 解答としてはそのときの P と $P^{-1}AP$ を答として解答せよ．

問 4． 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．つまり，適切な直交行列 P を用意し，$P^{\top}AP$ が対角行列になるようにせよ．なお，解答としてはそのときの P と AP を答として解答せよ．

問 5． 問 4 の行列 A に対し，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ として関数 $f(\boldsymbol{x})$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\top} A \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^{\top} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1$$

と定義する．

この関数 $f(\boldsymbol{x})$ に有限な最大値か最小値が存在するか調べよ．存在しないならば存在しないということとその根拠を，存在するならば,「最大値か最小値か」「そのときの $\boldsymbol{x}$ の値」「そのときの $f(\boldsymbol{x})$ の値」を解答として答えよ．

以上.