

線形代数学Ⅰ.

1.1 行列とベクトル

今学期最後あたりで
学ぶよ.

行列やベクトルの「正体」は 線形空間 というものを学ぶと
分かるのだが、そこから始めるとなかなか難しい.

まあここでは、形から入ろう.

matrix
行列: 数字を四角に並べたもの, とでも言うかな.
この数字を行列の成分とか要素などと言うよ.

() や [] で囲む記法が主流.

例. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1.2 & 6 \\ 5 & 10 & -7 \end{pmatrix}$ ← これは
3×3 行列
と言う.

行列には
アルファベットの太字
を添えることが多いよ.

$B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3.4 & 1.8 \\ 2 & 9 & -10 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ ← これは 3×4 行列.

これも行列. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$
これは第2行.
これは第2列.
こう書いたりも
するよ.

• A の $(a_{k1} \ a_{k2} \ \dots \ a_{kn})$
を第 k 行 と言い.

$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ を第 k 列 と言う.

• こう書いた時,
 $A \in m \times n$ 行列とか
 m 行 n 列 行列 とも言ふんだ.

vector
ベクトル: $m \times 1$ 行列 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ のことを 普通 はベクトル
と呼ぶ. #1

• ただし、 $1 \times n$ 行列 $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ のことを
横ベクトルとか行ベクトル なんて呼んでベクトル扱いすることもある.

• (上に合わせて) $m \times 1$ 行列 を 縦ベクトル とか 列ベクトル と
呼んだりもする.

• $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ のように小文字の「太字」で書くことが多い.

square matrix
正方行列: $n \times n$ 行列のこと.

diagonal matrix
対角行列: 正方行列で、対角成分 (a_{ii} のこと) 以外の成分
がゼロのもの.

例. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

identity matrix
単位行列: 全ての対角成分 = 1 な対角行列.
 I とか E で表わすことが多い.

例. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ゼロ行列: 全成分 = 0 な行列のこと.

transpose

転置: 行列 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ に対し行と列を交換した

行列 $B = (a_{ji})_{n \times m}$ を A の転置と言て、

${}^tA$ とか A^T などと書くよ。

例. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ -2 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対し

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 \\ 6 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

symmetric matrix

対称行列: 正交行列 A へ ${}^tA = A$ なもののこと。

skew-symmetric matrix

歪対称行列: ${}^tA = -A$ (交代行列とも)

クロネッカーのデルタ: $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & : i=j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$ といふ「記号」.
便利だよ。

1.2 行列の演算

- 行列の和, 差, スカラー倍, 積を定義する.
- 積が中味も性質も厄介だ.
- 割り算は? → 後で学ぶよ.

- **和, 差:** 行列 A と行列 B の和, 差は, この2つの行列が同じ形をしている時のみ可能で, 計算は各要素ごとに行えば良い.

例.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 15 & 9 & 3 \\ 9 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

- **スカラー倍:** 行列 A のスカラー c によるスカラー倍を, 行列 A の各要素を全て c 倍することと定義する.

↑
行列やベクトルに対して, 普通の数のことをスカラーと言うよ.

例.
$$2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 16 & 12 & 4 \\ 14 & 20 & -2 \end{pmatrix}$$

一般の
行列の積の話の前に...

- 行列とベクトルの積:

A と x の m が共通なことに注意!!

$n \times m$ 行列 A と, m 次元ベクトル x は
積を定義できて $Ax = b$ は n 次元ベクトルとなる.

この順序のみ

積の演算は以下のように定義される.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^m a_{1l} x_l \\ \sum_{l=1}^m a_{2l} x_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^m a_{nl} x_l \end{pmatrix}$$

A x b

この計算の意味は?

(1.4 の内容を先取りすることになるが)

- 行列・ベクトル = ベクトル の式は, 連立一次方程式を表わすのだ.

↓ 例で見よう

例. 連立一次方程式
$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 7, \\ x - 2y + 5z = 1 \end{cases}$$

線形代数の
最初の重要な
ポイントだよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

行列 ベクトル ベクトル

連立一次方程式の係数行列と言われるよ.

← この式の見方初めて分かることがたくさんあるよ (1.4 以降)

・ 行列と行列の積:

さっきの行列とベクトルの積の拡張で、

$n \times m$ 行列 A と $m \times l$ 行列 B の積が定義できて、
その結果は $n \times l$ 行列になる。演算の定義は以下。

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nl} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$A \qquad B \qquad AB \text{ の結果}$

と書くと、 $c_{ij} := \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$.

例. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3w \\ x+7z & y+7w \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3w \\ x+7z & y+7w \\ 5x+6z & 5y+6w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z+7\alpha & y+2w+7\beta \end{pmatrix}$$

→ これはどんな問題を表わしたものと思えば良い?

・ 行列・行列積は、「係数行列が共通の連立一次方程式が複数ある」状態を表わせる。 → 他の状況を表わしている場合の方が多んだけど、まだピンと来ないだろうか? とりあえずこらえて。

例. 2つの連立一次方程式 (ただし係数は同じ)

$$\begin{cases} 3x_1 + y_1 - 7z_1 = 1 \\ x_1 - 2y_1 + 5z_1 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_2 + y_2 - 7z_2 = 2 \\ x_2 - 2y_2 + 5z_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

この形式の方が後で良いことが多くあるよ。

教科書 p. 7 の例 5 も同様の内容だよ。

交通費の式 $Ax_1 = b_1$ と 昼食代の式 $Ax_2 = b_2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 500 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 3200 \\ 2700 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2100 \\ 1900 \end{pmatrix}$$

に対して A が共通なので

$$A \cdot (x_1, x_2) = (b_1, b_2) \text{ とまとめることができて、}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 & 600 \\ 700 & 500 \\ 500 & 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3200 & 2100 \\ 2700 & 1900 \end{pmatrix} \text{ と書けるわけだね。}$$

行列 etc. の演算の性質

これは前ページ
で示してあるね。

Point. 1. 和・差は2つの行列の形が同じときのみ可。

2. 積は「前の行列の列数」=「後の行列の行数」
のときのみ可。

3. 行列の積について一般に

$$AB \neq BA$$

←とても重要!!

である。これを行列の(積に対する)非可換性と言う。

例.
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}}_B = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 23 & 31 \end{pmatrix} \text{ に対して、}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 23 & 32 \end{pmatrix} \text{ とあり、}$$

$$AB \neq BA \text{ となっている。}$$

逆に $AB = BA$ するとき、 A と B は可換であると言う。↓
注: 「 A と B がどういう時に可換になるか?」には
固有値とか固有空間展開のキロンが必要だよ。
これは秋冬学期に教わる内容だね。

このコトで

良くやらかすミス例: 同じ形の正定行列 A, B に対して、 $(A+B)^2$ を計算して $A^2 + 2AB + B^2$ になる...のは間違い。

正しくは

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

一般に $AB \neq BA$ だからね。

その他、演算に成り立つ性質を示そう。

和・差: $A+B = B+A, A+B+C = (A+B)+C = A+(B+C) = B+(A+C)$

積: $n \times m$ 行列 $A, n \times n$ 単位行列 $I_n, m \times m$ 単位行列 I_m に対して、

$$I_n A = A I_m = A.$$

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

結果は同じだが、計算量は違、たりすよ。

一般に $n \times m$ 行列 $A, m \times l$ 行列 B の計算に nml 回の掛け算が必要。だから、 A, B, C の形が
各々 $n \times m, m \times l, l \times s$ の場合、 $(AB)C$ には $nml + nls = nl(m+s)$ 回、
 $A(BC)$ には $m ls + nms = ms(n+l)$ 回の
掛け算が必要で、この2つの数字は異なりうるね。例えば、 $n=l=100, m=s=2$ の場合、 $(AB)C$ だと 40,000 回の掛け算が必要だが
 $A(BC)$ だと 400 回で済むぞ。

分配律: $A(B+C) = AB+AC, (A+B)C = AC+BC$

転置: $(A+B)^T = A^T + B^T, (AB)^T = B^T A^T$

べき零行列: 有限で 0 より大きい整数 N に対して

$$A^N = 0 \text{ となる行列 } A \text{ をべき零行列という。}$$

↑ け、こ
重要!

今の話を 行列・ベクトル = ベクトルの形で見てみよう.

$$\left(\begin{array}{c} \text{元の} \\ \text{連立一次方程式} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

注. プロセスは全く同じ.

$$I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ なので } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{解.}$$

↓
上の式から分かるように $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は変更を受けないし、変形にも寄与しない.

面倒だし、これを書かない(省略する)でも良いのでは?

・拡大係数行列 $\leftarrow$ これに至る. この線は書かなくても良いよ.

連立一次方程式 $Ax = b$ に対し、 $\left(A \begin{array}{c} \vdots \\ b \end{array} \right)$ と

その 拡大係数行列 と言う.

$\rightarrow$ これを使うと掃き出し法の記述が楽になり、他にも分かることが有るよ(92.2だね).

例. 上の変形を拡大係数行列でやってみる.

$$\left(\begin{array}{c} \text{元の} \\ \text{連立一次方程式} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \text{解} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ここを単位行列 I

にできたし終了!! 右の $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が解になっている!!

今行ったこれらの操作が 行列の基本変形 で、改めて書くと下記の通り.

- i. ある行全体を C ($\neq 0$) 倍する.
- ii. ある2つの行を入れ替える.
- iii. ある行に他の行の C 倍を加える.

だから、こう言っても良い.

(くり返し)

「拡大係数行列に基本変形を加えて左の正則行列部分を単位行列にできたのならば、右のベクトル部分が解である」.

さて...

「ルールは分か、たか、解を得る為の計算の「指針」が分かる!!」
という人へ.



ポイントは拡大係数行列 $\left(\begin{array}{c|c} \square & \square \end{array} \right)$ の $\square$ を単位行列に近づけていくことにあふ.

だから、基本変形を上手く用いて

1. 各行で1つを除いて残りの要素 = ゼロを目指す
2. 1つのみ残る要素の列番号が重ならないようにする

の2つの方針を守れば良い.

あとは練習だね!!

念の為、
連立一次方程式とは？

複数の式から成るコト
を意味する

未知変数の1次式だ
を意味する

1乗まで
を意味する

例1. $\begin{cases} 3x + 2y + 7z = 8 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$ は (x, y, z) に対する連立一次方程式.

例1. $\begin{cases} 3x + 2y^2 = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ は (x, y) に対する連立一次方程式
ではない.

2.2. 簡約な行列

簡約な行列とは、大雑把に言えば

「掃き出し法で連立一次方程式を解こうとしてそれ以上
意味ある変形が出来なくなった係数行列」のコト.

行基本変形のコト.

~☆

def. 簡約な行列とは.

1. 行ベクトルは主成分 = 1 か、その行ベクトル = ゼロベクトル.

ただし、行の主成分とは、その行の「ゼロではない」一番左の成分

2. 第 i 行の主成分が (i, j_i) 成分とすると、

$$j_1 < j_2 < j_3 \dots \text{とされている.}$$

(i 行がゼロベクトルの時は主成分を (i, ∞) 成分と考える).

3. 主成分を含む列ベクトルは主成分以外はゼロ.

縦
↑
意味する

まあ、「階段状に左下がゼロになって、ゼロとの境界には1が入っている行列」のコトだ. 例を見てみよう.

例1. (教p.25) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← 第1行の主成分は $(1, 2)$ におよ1.
← 第2行 " $(2, 4)$ " 1.
← 第3行はゼロベクトル.
↑ 行主成分のある列は、主成分以外はゼロ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

← 第1行の主成分は $(1, 1)$ におよ1.
← 第2行 " $(2, 2)$ " 1.
← 第3行 " $(3, 5)$ " 1.

注. 単位行列やゼロ行列は簡約な行列である.

Q. これ、何の役に立つの？

A1. 左の☆から分かるように、

「連立一次方程式を解く為にできる行基本変形はココまで」と分かる (次回、詳しく教えるよ).

A2. (後述の) rank 階数 も定義する方法の1つとなる.

これで連立一次方程式の数学的性質がより詳しく分かる.

・行列の簡約化: 行基本変形をくり返して簡約な行列を得ること.

Th. 2.2.1.

↳ 行列は必ず簡約化でき、結果は一意.

→ 行基本変形が「下手」でも大丈夫!

気になる人は教 p. 25 ~ 26 の変形を追いかけてみよう.

・ 行列の **rank** とは、
簡約化した結果の主成分 1 の個数

行列 A の階数 $\text{rank}(A)$ と書き、

$\text{rank}(A) \stackrel{\text{def.}}{=} \left[\begin{array}{l} A \text{ を簡約化した行列の} \\ \text{ゼロベクトルでない行ベクトルの個数} \end{array} \right]$
と定義する.

例. 簡約化すると $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする行列の rank は 2.

簡約化した結果の主成分 1 の個数
と思っても良い.

注. 行列 A が $m \times n$ 型の場合、

$$\text{rank}(A) \leq m,$$

$$, \leq n.$$

Q. rank って結局 什么的こと?

A. その連立一次方程式の係数行列が本質的に幾つの式に相当するか? を表わしている. 詳しくは次回にやぶが、少したけ例を示すと、

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 5 \\ 7x + 8y + 9z = 8 \end{cases} \quad \text{という連立一次方程式を考える.}$$

これは一見、式が 3 つ含まれているが...

拡大係数行列 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \textcircled{3}-\textcircled{1} \\ \textcircled{3}-\textcircled{2} \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \textcircled{2}/3 \\ \textcircled{3}/6 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} \textcircled{1}-\textcircled{2} \\ \textcircled{3}-\textcircled{2} \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

rank = 2
方程式としては
実は 2 式しか含まれていない
ことを表わしている!

ここがゼロ
でない場合、
矛盾を意味する
(次回に詳しく)

2.3 連立一次方程式を解く ... とあるが、どうするかというと
その前のお話.

Q. そもそも、連立一次方程式はいつも「解ける」のか？ 解は1つなのか？

A. No! 3通りのケースが考えられるよ.

↓ 詳しく見てみよう.

連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \sim \star_1$$

は、 n 個の未知数 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して m 個の式がある...

ように見えるが、式の数は見せかけの可能性はある。← #9 でや、たぬ。

そこで、 $\star_1$ の簡約化を行い、
簡約な連立一次方程式

簡約な連立一次方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{l1}x_1 + \alpha_{l2}x_2 + \dots + \alpha_{ln}x_n = \beta_l \\ 0 = \beta_{l+1} \\ 0 = \beta_{l+2} \\ \vdots \\ 0 = \beta_m \end{array} \right. \sim \star 2 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{この部} \\ \text{分、7月} \end{array}$$

を得た、としよう.

☆₂が問題の本質を表わしているとみて良いのでこれを見よう. #10

この時、下の3つのケースが考えられる。

ケース1.
$$\begin{aligned} 0 &= \beta_{l+1} \\ 0 &= \beta_{l+2} \\ &\vdots \\ 0 &= \beta_m \end{aligned}$$
 とう部分が有り、しかもこの β の中に $\beta_s \neq 0 \ (l+1 \leq s \leq m)$ とうものがある。

$0 = \beta_s \neq 0$ を意味するので矛盾!!

☆₂には 解が無い ことになる。

どの $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を用意しても
 $0 = \beta_s \neq 0$ を満たさない。

例. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$... 見ただけでも分かるだろうが、
まあやってみよう。

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) - 2 \times (1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ 0=1 \end{cases} \leftarrow \text{楕円にある式の登場!}$$

解説. 行基本変形で $\square$ の中から消えよう行があった
 というコトなので、これは連立一次方程式の中に
 「他の式の 左辺 の足し合わせて 右辺 が書ける式がある」
 というコト.
 にも関わらず、右辺の足し合わせのつじつまが合いません
 この現象が起きるのだ.

ケース2. ケース1ではなく、かつ、 $l = n$ となっている場合。

どういうケースかという、簡約化した結果が

$$\begin{cases} x_1 & = \beta_1 \\ x_2 & = \beta_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \beta_n (= \beta_l) \end{cases} \quad \leftarrow \begin{array}{l} 0 = \beta_{l+1} \\ \vdots \\ 0 = \beta_m \text{ 部分は} \\ \text{あたとしむ全て} \\ 0 = 0 \text{ なの問題ない。} \end{array}$$

となっているケースだ。

これは明らかに $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ という一意の解があることを示している。

例. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{1}+2\times\textcircled{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{(-1)\times\textcircled{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \leftarrow \text{簡約化完了。}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 0 = 5 \\ 0 + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \quad \leftarrow \text{一意な解 ぞのぞ!!}$$

ケース3. ケース1ではなく、かつ、 $l < n$ となっている場合。

どういうケースかという、簡約化した結果が

$$\begin{cases} x_{s_1} + \dots & = \beta_1 \\ x_{s_2} + \dots & = \beta_2 \\ \vdots & \\ x_{s_l} + \dots & = \beta_l \end{cases} \quad \leftarrow \begin{array}{l} 0 = \beta_{l+1} \\ \vdots \\ 0 = \beta_m \text{ 部分について} \\ \text{はケース2と同様、} \\ \text{気にしなくて良い。} \end{array}$$

となっていて、未知数 $(x_1, \dots, x_n)$ の個数 n よりも式の数 l の方が少ないケースだ。

この場合、足りない式の数 $n - l = p$ 個のパラメータを使って解を書くことが可能だぞ。

理論より例を見た方が良いので例を見よう。

例(例9の例)。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 5 \\ 7x + 8y + 9z = 8 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{簡約化}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \quad \leftarrow \text{未知数は3つあるのに式が2つしかない。よってパラメータを1つ新たに導入する。}$$

主成分に対応する変数 $\leftarrow$ 主成分に対応していない変数 $\leftarrow$ この変数をパラメータに一致させるとよい。

残りは式をパラメータ C を導入して $z = C$ とおいて、変形

$$\begin{cases} x = z \\ y = -2z + 1 \\ z = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C \\ y = 1 - 2C \\ z = C \end{cases}, \text{ただし } C \text{ はパラメータ}$$

という解を導けるよ。

・これらの話と階数の関係。

順に見ていこう。

↓

ケース1.

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_{l+1} \\ 0 &= \beta_{l+2} \\ &\vdots \\ 0 &= \beta_m \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{この部分があり、しかもこの}\beta\text{の中に} \\ \beta_s \neq 0 \quad (l+1 \leq s \leq m) \\ \text{というものがあふ。} \end{array}$$

だ、ただこれも、これは #10 の $\star$ を見ると、拡大係数行列を簡約化した結果、
($A \parallel b$)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{rank}(A) \text{ に一致。} \\ \leftarrow \text{少なくとも一つあり、つまり、} \\ \text{rank}(A \parallel b) > l. \\ \text{非ゼロ} \end{array}$$

というコトを言っているの、

解が存在しない
ケースだね。→

ケース1 $\Leftrightarrow \text{rank}(A \parallel b) > \text{rank}(A)$.

↙ つまり、言い換えると、

$$\left[\begin{array}{l} \text{連立一次方程式 } Ax = b \text{ に対し、} \\ \text{rank}(A \parallel b) \neq \text{rank}(A) \Leftrightarrow \text{解なし。} \end{array} \right] \quad \text{と言える。}$$

じゃあケース2は？

これも同様に考えてみると、

ケース2 $\Leftrightarrow \text{rank}(A \parallel b) = \text{rank}(A) = n$
(解が一意に存在)

ケース3も同様に、

ケース3 $\Leftrightarrow \text{rank}(A \parallel b) = \text{rank}(A) < n$
(解はあるがパラメータの自由度あり)

となる。

↓ 混乱してきたのでまとめよう

全体として、以下の2つのQuestionで分類できる。

Q. $\text{rank}(A \parallel b) = \text{rank}(A)$? $\xrightarrow{\text{No.}} \text{解なし。}$ (ケース1) 情報過剰な状態

$\downarrow$ Yes.

Q. $\text{rank}(A) = n$? $\xrightarrow{\text{No.}} \text{パラメータ解あり。}$ (ケース3) 情報不足

$\downarrow$ Yes.

ちょうど良い → 一意解あり。 (ケース2)

注. 上を見ても分かるが、条件 C_1, C_2 は各々

情報が「多すぎない」
条件とも言える。

C_1 : 連立一次方程式に矛盾が含まれていない条件。

C_2 : 連立一次方程式が解を一意に決めるのに十分な情報を持っている条件

である。

・同次形の場合.

$Ax = 0$ の形を同次形と言う.

この時、常に $\text{rank}(A; 0) = \text{rank}(A)$ であるので、

Q. $\text{rank}(A) = n$? $\xrightarrow{\text{No.}}$ パラメータ解あり.

$\downarrow$ Yes.

一意解あり.

の2通りしか無い.

これを自明な解と言う

そして、 $Ax = 0$ に対して常に $x = 0$ は解であるので、
この言い方を使って下のようにも言う.

Q. $\text{rank}(A) = n$? $\xrightarrow{\text{No.}}$ 自明でない解を持つ.

$\downarrow$ Yes.

自明な解しかない.

2.4 正則行列

def. 逆行列

正逆行列のこ.
 $n \times n$ 行列 A に対し、 $n \times n$ 単位行列 I に対し、
 $AB = BA = I$ であるような $n \times n$ 行列 B を A の逆行列と言い、 A^{-1} と書く。
 明らかに、便利な存在だね

def. 正則行列

$n \times n$ 行列が逆行列を持つ時、その行列は正則行列と言われる。

- 注・ $n \times m$ 行列 ($n \neq m$) に対しては上の概念は関係ないよ。
- 実数は 0 以外で必ず逆数を持つけど、正逆行列は逆行列を必ず持つわけではないよ。
 - 正逆行列 A に対して、
 Q. A は正則?
 Q. A^{-1} の具体形は?

などの Q に答える方法は複数あるよ、この後に学ぶよ。
 (その一部)

Th. 一意性.

正逆行列 A が正則 $\Rightarrow A^{-1}$ は一意.

proof) A の逆行列として B, C があなれば、

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C \quad \text{よ} \quad B = C, \quad \square$$

Th. 2.4.1 (1つの値のみで判定可)

正逆行列 A, B に対して $AB = I \Rightarrow B = A^{-1}$

proof ... §3.4 にて.

さて、実は正逆行列 A の正則性は様々な性質で表わせる。
 その一部を示そう。

Th. 2.4.2 (正則性と等価な性質)

$n \times n$ 行列 A に対し、次の 1~6 は同値.

- A は正則
- $\text{rank}(A) = n$
- A を簡約化すると I になる
- $\forall b \in \mathbb{R}^n$ に対し、連立一次方程式 $Ax = b$ には一意解が存在する。
- $Ax = 0$ を満たす x は 0 のみ。
- $\det(A) \neq 0$.

$\leftarrow \det(A)$ は A の行列式とよばれる量(実数)で、
 §3で学ぶよ。

- ↓
- 1~5 の同値性は実は既に学んだコトを組み合わせただけで分けるよ。
 気になる人は教科書の pp.34~35 を読む。
 - 6 はまだ知らない概念 (行列式) を使った話だが、
 とても便利なので先に書いておいたよ。

逆行列の計算方法 ～ 掃き出し法バージョン

これは簡単で、 $n \times n$ 正則行列 A に対し、 $n \times n$ 単位行列 I を使って

1. $(A \mid I)$ という拡大係数行列を作り、
2. A 部分を簡約化する (A が正則だと I になるはず)
3. すなわち、 $(I \mid A^{-1})$ となっているはず!!

ここが欲しいが、
逆行列だ!!

というシンプルな手順だ。

注. 簡約化してもここが I にならない場合、 A は「正則じゃない」よ。
(当然、 A^{-1} も存在しないよ)

例 (教p.36 例題 2.4.1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ の } A^{-1} \text{ を求めてみよう。}$$

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{③} - 2 \times \text{①}} \xrightarrow{\text{③} - \text{①}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{②} \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} - 2 \times \text{②}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{①} + \text{③}} \xrightarrow{\text{②} - \text{③}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

I A^{-1} というわけで、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

$A \cdot A^{-1} = I$ となることを確かめておこう!

何故この手順で逆行列が計算できるのか?

→ 拡大係数行列 $(A \mid I)$ の「もと」を考えてみよう。これは

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}, \quad e_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \text{ (k番目)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \text{ とすると})$$

n 個の連立一次方程式 $Ax_k = e_k, \quad k=1, 2, \dots, n$ を考えて並べたもの、つまり、

$$A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} = I \quad \sim \star$$

X とはおこう

を考えてこれを解いて X を求めようとするコトになる。よって単なる連立一次方程式の求解をすれば良いので、**一意解 X があるならば**

$$(A \mid e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \longrightarrow (I \mid x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \text{ となるはず。}$$

A の簡約化 X

そして、 $\star \Leftrightarrow AX = I$ であることから、Th. 2.4.1 より $X = A^{-1}$ 。

3.3. determinant
行列式 ... 役に立つ有用な量なんだけど、最初はとつきにくいかな。
先にくれ行列式について解説しておこう。

・行列式とは、 $n \times n$ 行列 A に対して実数を返す関数で、

$\det(A)$ とか $|A|$ などと表記される。

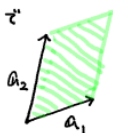
定義は 3.2 で学ぶが、その意味を書くと、

ただし、 $a_{11}, \dots, a_{nn}$ が
右系は正の値、
左系は負
とある。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

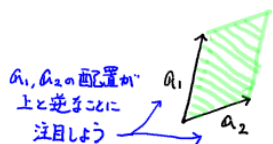
$\det(A)$ は $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ が作る n 次元立体の体積
なのである。

例) $n=2$ で



という状況だと、

$$\det(A) = (+1) \times \text{面積}$$



という状況だと、

$$\det(A) = (-1) \times \text{面積}$$

注. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$ が作る n 次元立体の
体積 = 0

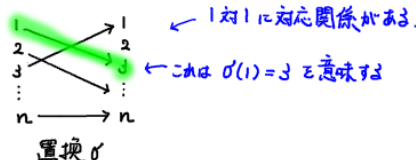
$\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$ の中に、立体を作るのに役に立たない
ベクトルがある。つまり、(たいてい逆だか)
簡約化で消えてゼロベクトルになるものがある。

$\Leftrightarrow \text{rank}(A) < n$

$\Leftrightarrow A$ は正則ではない。 ← #14 で言ったね。

3.3.1 置換 ... 数学のあちこちで使うツール。行列式の定義に使う。

・置換とは、 n 個の文字 $\{1, 2, \dots, n\} \in n$ 個の文字 $\{1, 2, \dots, n\}$ へ写す
1対1写像のこと。



おお、 $\sigma(i) = k_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}$ と表記する。
動かさない文字、つまり $\sigma(i) = i$ なら i について
書かなくても良い。

例. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma(1)=2 \\ \sigma(2)=3 \\ \sigma(3)=4 \\ \sigma(4)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

... まあ、この表記が一番シンプルで
良いね。

・置換の積。

σ, τ が n 文字の置換のとき、その積 $\sigma\tau \in \mathcal{S}_n$ は置換として

$$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) \text{ for } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

を満たすものとして定義する。

・単位置換 ... どの文字も動かさない置換。 E と書いたりする。

・逆置換 ... $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$ に対しての置換 $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ のことだ。

$$\sigma^{-1} \text{ と書いたりする。 } \sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = E \text{ とする。}$$

・巡回置換.

$$\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_r \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma} k_1 \\ \xrightarrow{\sigma} k_2 \\ \xrightarrow{\sigma} k_3 \\ \vdots \\ \xrightarrow{\sigma} k_r \end{array} \Leftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_r \\ k_2 & k_3 & k_4 & \dots & k_1 \end{pmatrix} \text{ のこと.}$$

$\sigma = (k_1 k_2 \dots k_r)$ と書いたりする.

注. 上の文字 $k_1, k_2, \dots, k_r$ に含まれない文字は 動かないよ.

例. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ は $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ と書けて、また、

$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ と並べ直すと $\begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 5 \end{array}$ と考えていいのぞ

巡回置換であり、 $\sigma = (2 \ 5 \ 3)$ と表わせよ.

重要な事実. 任意の置換は巡回置換の積で表わせよ.

→ 実際に積に分解するシンプルな手順がある. 以下の例で見てみよう.

例. (教p.40 例題3.1.1)

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ を巡回置換の積に分解してみる.

まず、最初の $1 \rightarrow 4$ に着目して、これをたどっていく. すなわち、

$1 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 2$ と考えていいのぞ.

文字 $\{1, 4, 2\}$ については $\sigma_1 = (1 \ 4 \ 2)$ という巡回置換になっている.

残りは $\sigma_{残} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ でこれも同様に $3 \rightarrow 6$ を元に

たどると $3 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ と考えていいのぞ $\sigma_{残} = (3 \ 6 \ 5 \ 7)$.

よって $\sigma = (3 \ 6 \ 5 \ 7)(1 \ 4 \ 2)$ と表わせよ.

・互換 ... 2文字のみの入れ替えを行う置換のこと. 巡回置換でもある.

$\sigma = (i \ j)$ という形にある.

重要な事実. 巡回置換 $\sigma = (k_1 k_2 \dots k_r)$ は

$\sigma = (k_1 k_r)(k_1 k_{r-1}) \dots (k_1 k_3)(k_1 k_2)$ のように互換の積で表わせよ.

例. $\sigma = (3 \ 6 \ 5 \ 7) = (3 \ 7)(3 \ 5)(3 \ 6)$ を確かめてみよう.

$\begin{array}{c} 3 \rightarrow 3 \\ 6 \rightarrow 6 \\ 5 \rightarrow 5 \\ 7 \rightarrow 7 \end{array} \xrightarrow{(3 \ 6)} \begin{array}{c} 3 \rightarrow 6 \\ 6 \rightarrow 3 \\ 5 \rightarrow 5 \\ 7 \rightarrow 7 \end{array} \xrightarrow{(3 \ 5)} \begin{array}{c} 3 \rightarrow 5 \\ 5 \rightarrow 3 \\ 6 \rightarrow 6 \\ 7 \rightarrow 7 \end{array} \xrightarrow{(3 \ 7)} \begin{array}{c} 3 \rightarrow 7 \\ 7 \rightarrow 3 \\ 5 \rightarrow 5 \\ 6 \rightarrow 6 \end{array}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 5 \end{array}$ より確かに正しい.

重要な事実. (上の2つの重要な事実より)

任意の置換は互換の積で表わせよ.

・置換の符号 ... 置換 σ が互換 m 個の積で表わせし時、

$\text{sgn}(\sigma) := (-1)^m$ を σ の符号と言う.

注. σ に対して互換の積の表し方は一意じゃないよ. つまり、 σ に対して m は一つに定まらない. しかし、 σ に対して異なる m を m_1, m_2 とおくと、 m_1 と m_2 の差は必ず偶数なので、
 $(-1)^{m_1} = (-1)^{m_2}$ とおけるのだ. だから符号は一意なのだ.

注. $\text{sgn}(\text{単位置換 } \varepsilon) = 1$.

... また、 $\varepsilon = (k_1 k_2)(k_1 k_2)$ と書けるので、
 $\text{sgn}(\varepsilon) = (-1)^2 = 1$ なのはすぐ分かるよ.

・偶置換, 奇置換 ... $\text{sgn}(\sigma) = 1$ の σ を偶置換, -1 の σ を奇置換と言う.

§3.2 行列式の定義と性質(1)

さて、こそやと行列式の数学的な定義を行う。

← 実際は、#16のような概念が先に在った方がいいかも...

def. $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し、 n の行列式 $\det(A)$ と

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定義する。

ただし、 S_n は n 文字の置換全体である。

← この def. を用いて実際に計算することはめったに無いよ。

2x2 行列 例. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し、2文字の置換は E と $(1,2)$ の2つ

単位置換

しかないのて、 $S_2 = \{E, (1,2)\}$ とおき、よって、

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= \underbrace{\operatorname{sgn}(E)}_{+1} a_{11} a_{22} + \underbrace{\operatorname{sgn}((1,2))}_{-1} a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

注. 2×2 行列の行列式に対しては、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と書いて

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{と暗記している人が多い。}$$

注. 3×3 以上の大きさの行列の行列式の計算法を覚えようといふ方が多いよ。間違えて覚える人がけっこう居るんだ。

#18

ちよと先取り... こそ知ってあった方が楽かなと思うので先に §3.3 の内容を少しだけ示しておく。

Th 3.3.1 (行列を転置しても行列式は同じ)

正交代行列 A に対し、 $\det(A^T) = \det(A)$ 。

← 行列式の計算は行でも列でも同じだよ。良いということだよ。

proof) 容易だ。気になる人は教科書の p.49 を読む。

Th 3.2.1 (行列を小さくできるケース)

← 対象を、1つ小さいサイズで計算できるケースがあるよという話。

$$n \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n-1}$$

Q. 行列の簡約化でこの形にまで変形すればいい? ⇒ 実は Yes! だ。

そのつもりでここの話を理解しよう。

一応、Th 3.2.1 の例を示しておく。

$$\text{例. } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = 3(8 - 3) = 15.$$

$$\begin{aligned} &\left(\text{もしもこれを def. 通りに計算すると、} \right. \\ &\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + \underbrace{1 \cdot 3 \cdot 0}_0 + \underbrace{0 \cdot 1 \cdot 2}_0 - \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 0}_0 - \underbrace{1 \cdot 0 \cdot 4}_0 - 3 \cdot 1 \cdot 3 \\ &\quad \quad \quad = 24 - 9 = 15. \\ &\quad \left. 3 \times 3 \text{ などまだ直接計算可能だが、明らかに手間は多いね...} \right) \end{aligned}$$

Th 3.2.2 ~ 3.2.4 簡約化の操作と行列式の関係

簡約化の過程には何種類かの「操作」があった。これらの操作で行列式の値がどういった変化を受けるかを知っておこう。

1. A の中の 1 つの行を C 倍する $\rightarrow \det(A)$ は C 倍になる。

$$\text{例. } \begin{vmatrix} a & b \\ r \cdot c & r \cdot d \end{vmatrix} = a \cdot r \cdot d - b \cdot r \cdot c = r(ad - bc) = r \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

注. よて、ある行 = ゼロベクトルの時、 $\det(A) = 0$ 。
(よて $r=0$ としたことに相当する)

2. A の中の第 i 行を $A^T + B^T$ とみなすと、他の行は同じで第 i 行に A^T と B^T を入れた行列の行列式の和 $= \det(A)$ 。

$$\text{例. } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a+3 & b+6 & c+9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

3. A の 2 つの行を入れ替える $\rightarrow \det(A)$ は (-1) 倍される。

$$\text{例. } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

32 -32

注. よて、 A の中に等しい行がある $\rightarrow \det(A) = 0$ 。

4. A のある行に他の行の C 倍を加える $\rightarrow \det(A)$ は変化しない。
(1. と 2. と 3. の応用)

$$\text{例. } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7+2 & 2+4 & 4+6 \end{vmatrix} \xrightarrow{2. \text{ に } 2. \text{ により}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

2 行目の 2 倍を
3 行目に足して
いる。

$$\xrightarrow{1. \text{ により}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 0$ (2 行目と 3 行目が 同値になるため、よて)

で、何が言いたいのか？

簡約化と実質的に同じ操作

$\rightarrow$ 左の操作 1. ~ 4. を上手く組み合わせて。

$n \times n$ 行列 A を行列式計算中に $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ の形に変形すれば、

Th 3.2.1 により、1 つのサイズの行列の行列式を計算すれば $\det(A)$ が求められる。

注. 実は、上の話はもう少し一般化できる ($\rightarrow$ 3.3.4 の余因子展開)。

#18 の Th 3.3.1 より、列に対して操作しても良い。

$$\text{例. } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{②} + \text{①} \times 2 \\ \text{③} + \text{①} \times 3}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 15 \\ 11 & 0 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{1 列と 2 列を} \\ \text{入れ替え}}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix}$$

Th 3.2.1 により

$$= (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{左乗 1. により}} = (-1) \cdot 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -11 \cdot (1 \cdot 1 - 15 \cdot 1) = 154.$$

3.3 行列式の性質(2)

- Th 3.3.1 ~ 3.3.3 は実質的に既出であるので省略。
(3.3.2は行についての操作だったが、3.3.3は列についても同じと言っているだけなので。)

ちょっと拡張...

Th 3.3.4 (ブロック三角行列の行列式)

Aが r 次正定行列, Dが s 次正定行列の時,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = |A| \cdot |D|$$

← 二は全てゼロ

... proofは教科書を見てね。

例. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ で良い。

Th 3.3.5 (行列の積と行列式は計算順序を交換して良い)

$$|AB| = |A| \cdot |B| \quad \leftarrow \text{便利な関係式で、良く使えよ。}$$

ただし、A, Bは同じサイズの正定行列とする。

証明は教科書 p. 52にあるが、行列式が積分の変数変換時の倍率であるコを知っていると、このTh. は「ほぼ当然」と言えるよ。

例. (数 p. 52 例4)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} \text{ に Th 3.3.5 を適用して、}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ -d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{vmatrix}$$

$$(a^2+b^2) \cdot (c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad-bc)^2$$

3.4 余因子行列とCramerの公式

← 必要は A_{ij} と通る縦・横の部分を取り除くのだ。

def. 行列 A の第 i 行と第 j 列を除いた行列を A_{ij} と書く。

例. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ に対し、 $A_{32} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

← 3行 2列

← 難しい。どうやって一般化したかは数 p. 54, 55 を読む。

Th. 余因子展開 (Th 3.2.1 を一般化したもの。いつでも使え！)

$$n \times n \text{ 行列 } A \text{ に対し、第 } i \text{ 行に着目すると } |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad \text{と展開でき、}$$

$$\text{第 } j \text{ 列 } \quad |A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad \text{とできる。}$$

def. A_{ij} に対して $(-1)^{i+j} |A_{ij}|$ を余因子と言って、 $\tilde{a}_{ij}$ と書いたりする。

注. 余因子を使って、上の展開式を $|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \tilde{a}_{kj}$ for $1 \leq i, j \leq n$ と書くこともできる。

例. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ の行列式を例えば第2列について余因子展開すると、

$$|A| = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(20-0) - 3(15+4) - 6(0+8) = -125. \text{ と計算できる。}$$

← 符号は $i+j$ が偶数 $+1$, 奇数 -1

Q. 結局、行列式はどの方法で計算するのがオススメなの?

A. まあオススメ順に書くと以下の通り。

1. (オススメ). 井19の、 $|A| \xrightarrow{\text{変形}} \begin{vmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ \vdots & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix}$ とする方法。 ← 縦横は逆でもいいよ。

2. (まあまあ). 余因子展開。

3. (止めとけ). 行列式の数学的定義の通りに置換を用いて計算する。

4. (止めとけ). (3 or 4 次以上) 公式を暗記して。

Th 3.4.3 (Cramer の公式)

$n \times n$ の正則な行列 A に対する連立一次方程式 $Ax = b$ を考えよ。

この時、解 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ に対し、次の式が成り立つ。

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \overset{i}{b} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \overset{i}{b} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \text{for } i=1, 2, \dots, n.$$

← これも計算量が大きいので、実際に使用することは止めておくべし。

ただし、 $(a_{11}, \dots, \overset{i}{b}, \dots, a_{nn})$ は A の第 i 列を b で書き換えた行列である。

例. (教 p. 58 例題 3.4.2)

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{の解 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ を求めよ。}$$

← 2×2 の問題ならば、大した計算量ではないが...

まず、 $|A| = 10 - 3 = 7$ 。

$$\text{次に、} x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(6-2) = \frac{4}{7}, \quad x_2 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(10-9) = \frac{1}{7}.$$

$$\text{よって解 } x = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§3.5 特別な形の行列式 ... 覚えておくに役立つ場面も有るかも? というものの列挙。

色々あるが、ここでは特に有名な Vandermonde の行列式のみ示しておく。残りは教科書を読む。

def. Vandermonde の行列式とは以下のものを言う。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

← Σ に似てはいるが、"積" を意味する。

↑
この形の行列式が応用上時々現われるのだ。

$$\text{例. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (z-x)(z-y)(y-x)$$

def. $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の余因子 $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ を用いて以下の式で定義される行列

$$\tilde{A} := (\tilde{a}_{ji}) \quad \leftarrow \text{添字が逆なことに注意!}$$

を A の余因子行列と言う。

$$\text{例. } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ に対し、} \tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \dots, \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \text{ を計算すると、}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -20 & 30 \\ -17 & 19 & -16 \\ -6 & -8 & -13 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{この9つの成分は、それぞれに計算しなければならない。}$$

$$A \text{ の余因子行列 } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -15 & -17 & -6 \\ -20 & 19 & -8 \\ 30 & -16 & -13 \end{pmatrix} \text{ を得る。}$$

Th 3.4.1 (余因子行列は逆行列、はい)

$n \times n$ 行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ に対し、次の式が成り立つ。

$$A \tilde{A} = \tilde{A} A = |A| I \quad \dots \text{証明は教 p. 56 を読む。}$$

⇒ 系 (Th 3.4.2)

• A が正則行列 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ 。

• A が正則なとき、逆行列 $A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$ 。

← この式を使って逆行列を計算するのは止めておくべし。計算量が大変に大きいのだ。

$$\text{例. } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ の逆行列は、\#20 で } |A| = -125 \text{ を既に求めておき、余因子行列 } \tilde{A} \text{ も上で}$$

$$\text{既に計算済みなので、} A^{-1} = \frac{1}{-125} \begin{pmatrix} 15 & 17 & 6 \\ 20 & -19 & 8 \\ -30 & 16 & 13 \end{pmatrix} \text{ となることが分かる。}$$

4. ベクトル空間

22-1

高校までは次元までのユークリッド空間だね。

まず、大学で学ぶ「空間」は、高校まで扱っていた空間よりも抽象度の高い概念だ。

空間 = ルールの有る集合

と思、ておこう。

そしてここでは、線形代数の主役であるベクトルが集まった集合であるベクトル空間について学ぶ。

一般に、 K という記号を書いたりする。

「四則演算の結果もその集合に含まれる」という意味。

def. field 体. 数の集合で、ゼロで割ることを除いてその中で四則演算が行えるものという。

- ・有理数全体のなす体を有理数体といい、 $\mathbb{Q}$ と書いたりする。
- ・実数 $\mathbb{R}$ 実数体
- ・複素数 $\mathbb{C}$ 複素数体

注: 整数全体は体には含まれない。というのも、整数/整数は一般に整数ではないので。

def. ベクトル空間.

22-2.

V が体 K 上のベクトル空間である

def. $\left\{ \begin{array}{l} \text{和: } u+v \in V \quad (u, v \in V) \\ \text{スカラー倍: } a u \in V \quad (a \in K, u \in V) \end{array} \right.$ が定義されていて、次の 1~8 を満たす。

- ゼロベクトル 0 と呼ぶよ。
- $u+v = v+u$,
 - $u+(v+w) = (u+v)+w$,
 - $\exists 0 \in V$ が存在して $u+0 = u$,
 - $a(bu) = (ab)u$,
 - $(a+b)u = au + bu$,
 - $a(u+v) = au + av$,
 - $1u = u$,
 - $0u = 0$

注. 上の 1~8 には変わったものは含まれておらず、定義自体には特に注意すべき点はない。
要注意なのはこの定義、いや、この概念の適用範囲の広さである。

下の例にも現われるが、こんなものもベクトル空間なのか! とおどろくようなものがある。

例. ベクトル空間の例を挙げておこう。

22-3.

1. 実数も要素にもつ n 次元ベクトル全体の集合は $\mathbb{R}^n$ と書いたりする。

(これまで学んできた) 行列演算の和、スカラー倍のもとで $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である。

2. 実数係数の n 次以下の多項式全体 ($\mathbb{R}[x]_n$ と書いたりする) は、通常の多項式の和と定数倍のもとで $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である。

3. 区間 (a, b) 上で連続な実函数全体 ($C(a, b)$ と書いたりする) は、通常の函数の和と定数倍のもとで $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である。

... 上の例は $\mathbb{R}$ に注目したものだが、他の体でも同様だ。

注. 上の例の 2 や 3 はこれまでに無い概念で「見慣れないだろうが」、応用上 大変に重要になってくるので今のうちに理解しておこう。

subspace def. 部分空間. ベクトル空間 V の部分集合 W が V の和とスカラー倍でベクトル空間となるとき、

22-4

W も V の (線形) 部分空間、もしくは部分ベクトル空間と言う。

Th 4.1.1

W がベクトル空間 V の部分空間 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. 0 \in W, \text{ かつ} \\ 2. u, v \in W \Rightarrow u+v \in W, \text{ かつ} \\ 3. a \in \mathbb{R}, u \in W \Rightarrow au \in W. \end{array} \right.$

§5.1 で出てくれば先取りしよう。

kernel def. 核. 行列 A に対し $Ax = 0$ を満たす x 全体のなす集合を A の核 (カーネル) と言い、 $\text{Ker}(A)$ と書く。

例. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対し、 $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解はノート #11 でのケース 3 の例と同様にして

$x = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$ となるので、 $\text{Ker}(A) = \left\{ c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$ 。
↑
パラメータ

• 重要な事実. $m \times n$ 行列 A の核 $\text{Ker}(A)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間である.

... proof は教. 例題 4.1.1 を見よ.

← Ker の定義そのもの、だよな

注. A の核 $\text{Ker}(A)$ を、同次形連立一次方程式 $Ax=0$ の解空間 とも言う.

て、何が言えるのか?

- 上の例 2. では、「 W に対して 和とスカラー倍が閉じていて、 W は #22-2 の性質 1~8 を持つ」ことが **保証された** ということになる. これは有力な情報といえる.
- 例 1. では W の性質について情報が増えていない. 扱いにくいね.

Q. だから? どう役に立つの?

空間としての

A. 対象としては集合が **空間になっただけ** 色々な性質を持つコトが分かるのでありがたいのだ.

逆に、空間になってないということは、その集合を扱い易くするルールが「無さそう」ということでもある.

例. 部分空間になっているか?

1. (教. 例題 4.1.2 (2)). $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間か?

→ W が 0 を含み、かつ $\mathbb{R}^3$ の和、スカラー倍に対して閉じていなければ W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間だ.
よってこの2つの条件を check すればいい.

結果がその集合に含まれるという意味.

まず $0 \in W$ か? は、 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるので $0 \notin W$.

よって W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない.

2. (教. 例題 4.1.3 (3)). $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid xf'(x) = 2f(x) \}$ は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間か?

→ W が $0 (= 0u, u \in \mathbb{R}[x]_3 \text{ かつ } 0 = \text{定数 } 0 \text{ という多項式})$ を含み、かつ $\mathbb{R}[x]_3$ の和、スカラー倍について閉じているかを check する.

まず、 $0 \in W$ か? は、 $f(x) = \text{const. } 0$ に対し $f' = 0$ かつ $xf' = 0 = 2 \cdot 0$ より Yes.

次に $f, g \in W$ に対し $f+g \in W$? は $x(f+g)' = xf' + xg' = 2f + 2g = 2(f+g)$ より Yes.

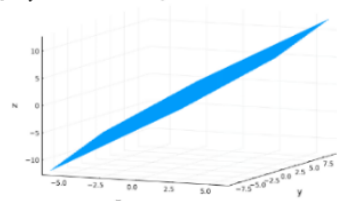
最後に、 $a \in \mathbb{R}, f \in W$ に対し $af \in W$? は

$x(af)' = xaf' = axf' = a \cdot 2f = 2af = 2(af)$ より Yes.

よって W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である.

(続き)

by 3 vectors



V も W も

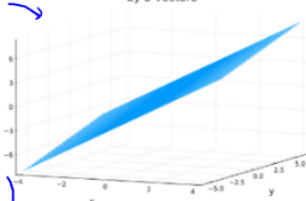
2次元平面

なことが
分かる。

↑

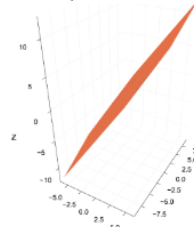
前ページの計算から、
その平面の
法線ベクトル = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

by 2 vectors



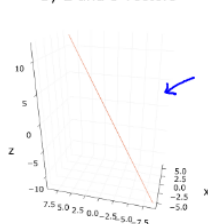
1. $V = \text{span}\{x_1, x_2, x_3\}$ の一部分 2. $W = \text{span}\{x_1, x_2\}$ の一部分

by 2 and 3 vectors



V と W を
同時に描くと
ひたひた重なって、

by 2 and 3 vectors



$V = W$ であること
が、はきり分かる。

3. V と W を同時に描いた図

4. 3の図を角度を変えて見たもの。

#25-1

#25-2.

教科書 定理 4.2.1 ~ 4.2.5 はほぼ当たり前のことしか言っていないので省略。

ただし、

理解の為。ポイントは、#24-4にも登場した

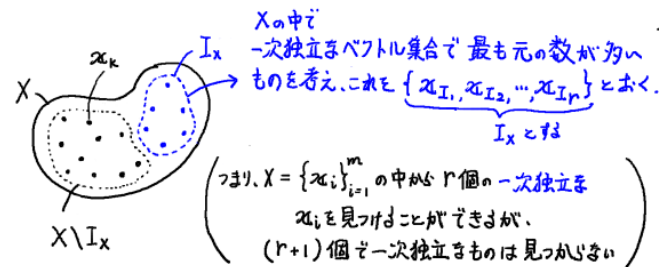
$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}, \quad u_i \text{ の次元は自由.}$$

という表記を自由に行き来できるか にある。

そのつもりで定理 4.2.1 ~ 4.2.5 を読んでみよう。

4.3 一次独立なベクトルの最大個数

#26-1.



この元の数 r を
 集合 X のベクトルの一次独立な
 最大個数と言う。

つまり、 $X = \{x_i\}_{i=1}^m$ の中から r 個の一次独立な
 x_i を見つけることはできるが、
 $(r+1)$ 個の一次独立なものは見つからない

I_X が X の代表のような
 存在だ、というコト。

(Th 4.3.2)

残り $m-r$ 個のベクトル $X \setminus I_X$ を $\{x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m\}$ とナンバリングし直したとして、これらが

$$x_k = c_1 x_{I_1} + c_2 x_{I_2} + \dots + c_r x_{I_r}, \quad r+1 \leq k \leq m$$

のように I_X の元による一次結合で書ける。

Th 4.3.1. (一次結合すると独立度は下がるか 同じまたはよ)

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ の一次結合で $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ を作った場合、
 (つまり、 $v_k = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m, \quad 1 \leq k \leq n$ と書ける場合)

一次独立なベクトルの最大個数 of $U \geq$ 一次独立なベクトルの最大個数 of V

例. $U = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, V = \left\{ y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_1 + x_2, y_3 = x_3 \right\}$ に対して
 3つが一次独立。 > この2つが一次独立。
 独立度が下った。

注: ただし、簡約化の手続きは独立度を変化させない。

だから、実は

簡約化して残った角の $\boxed{1}$ の成分と持て、 $\boxed{1}$ のベクトル数 = 一次独立なベクトルの最大個数

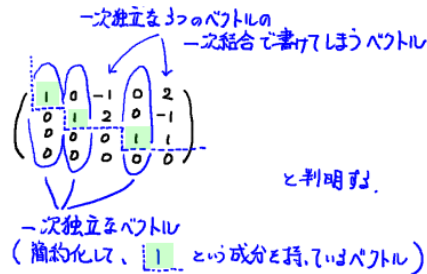
rank (ベクトルを並べた matrix)

である (Th 4.3.3 ~ 4.3.5 を含む)。

例. (教 p.76 例題 4.3.1)

$$元 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(行変形)
 簡約化



- $\cdot \{a_1, a_2, a_4\}$ は一次独立。
- $\cdot a_3 = -a_1 + 2a_2$
- $\cdot a_5 = 2a_1 - a_2 + a_4$

と判明する。

#26-2.

Th. 4.3.6: 抽象的なベクトルの一次独立性を行列で判断する。

ベクトル空間 V のベクトル $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ が一次独立であるとして、
 V 中のベクトル $v_k, k=1 \sim m$ が B の一次結合で書けるという。

つまり、 $v_k = a_{1k} u_1 + a_{2k} u_2 + \dots + a_{nk} u_n, \quad k=1 \sim m$ と書けるということだ。

$$\Leftrightarrow v_k = (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \quad k=1 \sim n$$

A は必ず具体的な
 「行列」の形である。

$$\Leftrightarrow (v_1, v_2, \dots, v_m) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

この時、

$\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ の一次関係は $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ のそれと同じである。

抽象的なベクトルかも。

一次結合で
 どう関係におか
 という意味。

数字で構成された具体的なベクトル。

#26-3.

一次結合も含めて、大丈夫。

#26-4.

注. u_1 や u_2 は
 抽象的なベクトルも OK、
 つまり、 $u_1 = x, u_2 = x^2, \dots$
 などもあり、
 注意しよう。

例. (教 p.79 例題 4.3.2)

Q. $V = \mathcal{R}[x]_3$ のベクトル

$$v_1 = 1+x+3x^2, v_2 = 1+2x-x^2, v_3 = 1+3x-3x^2-2x^3, v_4 = -2-4x+x^2-x^3, v_5 = -1-4x+7x^2$$

の一次関係を調べよ.
 ← 為項式の一次関係? そのまゝ取り組むととても面倒だ...
 他Bにしてもいい.

A. まず、 V の一次独立なベクトル B を用意する. 明らかに $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ といいのでそうしよう.

すると, $(v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ と書ける.

↑ $a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5$ としよう.このおかげで
行列の変形だけで
計算できる.よって Th. 4.3.6 により、 $v_1 \sim v_5$ を調べる代わりに $a_1 \sim a_5$ を調べればよい.これは #26-3 の例で既に調べていて結果を知っている. それを $v_1 \sim v_5$ の関係と伝えようと、

$$\begin{cases} \cdot \{v_1, v_2, v_4\} \text{ は一次独立.} \\ \cdot v_3 = -v_1 + 2v_2 \\ \cdot v_5 = 2v_1 - v_2 + v_4 \end{cases} \quad \text{という結果を得る.}$$

4.4 ベクトル空間の基底と次元

復習. ベクトル $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ の一次結合全ての集合 = $\text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ はベクトル空間になっている。
(この $\text{span}\{\dots\}$ を、ベクトル $\{u_1, \dots, u_n\}$ の張る空間とか、生成する空間などと呼ぶ)。

def. ベクトル空間 V に対し、ベクトル $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ が V の基底である。
注. V の基底は無数にあるよ。

def. $\Leftrightarrow \begin{cases} V = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \\ \text{かつ} \\ \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ は一次独立} \end{cases}$ $\rightarrow$ つまり、 $\forall v \in V$ は必ず " V の基底 $\{u_1, \dots, u_n\}$ を用いて $v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$ と一意に表わせば、
逆に、 $\forall v \in V$ がこのように一意に表わせば $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V の基底である。

例. $V = \mathbb{R}^k$ に対し、 $e_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (k とおくと $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ は V の基底である。
 $\rightarrow$ これを $\mathbb{R}^n$ の標準基底と言うこともある。

上の注に書いたように V に対する基底は無数にあるが、それらに共通して言えることがある。

Th. 4.4.1

ベクトル空間 V の基底に含まれるベクトルの個数は基底によらず一定である。

$\uparrow$ dimension
これを V の次元 と言い、 $\dim(V)$ と書く。

注. ゼロベクトル「のみ」からなる集合 $\{0\}$ は定義上ベクトル空間である。
そして、 $\{0\} = \text{span}\{0\}$ であるがベクトル 0 は一次独立ではないので $\{0\}$ は基底を持たない。
よって $\dim(\{0\}) = 0$ 。つまり、ゼロ空間の次元はゼロ。

注. $\dim(V)$ が有限な時、 V を有限次元ベクトル空間と言ったりする。

Th. 4.4.2 (ほぼ当然)

$\dim(V) = V$ の一次独立なベクトルの最大個数

#28-1

例. $V = \mathbb{R}^n$ の時、 $\dim V = n$ 。← 標準基底を思えば良い。
例. $V = \mathbb{R}[x]_n$ (n 次多項式全て) の時、例えば $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ は V の基底であるので $\dim V = n+1$ 。
例. $M = \{x \in \mathbb{R}^3, \text{ただし } x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ に対し } x+y+z=1\}$ の時は?

制約条件が1つあるのでそれを用いて自由度を1つ減らすということを確認しよう。

この場合は $x+y+z=1 \Leftrightarrow z=1-x-y$ として自由度 z を消去して、

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ と書き直せる。すなわち、 M だ、ということも示している。
M のものはベクトル空間ではないことも示している。

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とあるので、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を原点にとり直すならば

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ が基底となる、と見なせる。つまり、例えば

$V := \left\{ x - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in M \right\}$ は基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ を持つベクトル空間で $\dim(V) = 2$ 。



M は2次元な存在だが、原点を含んでいないのでベクトル空間ではない。

#28-2.

連立一次方程式との関係 ~ Ker で理解する。

#28-1で示したように、 $\text{Ker}(A) = \{x \mid Ax=0\}$ はベクトル空間である。

この $\text{Ker}(A)$ の基底を $Ax=0$ の基本解と言ったりする。

例(教科p.83 例題 4.4.1)で示してみよう。

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と書き直して A を簡約化すると、
 $\text{rank}(A) = 2$ を示している。

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-2\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_4 - x_5, \\ x_3 = x_4 - 2x_5, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 2c_1 - 3c_2 - c_3 \\ c_1 \\ c_2 - 2c_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とあるので、
 u_1, u_2, u_3 として

! $x \in \mathbb{R}^5$ は本来、5つの自由度を持つ。ここに着目しよう。

$\{u_1, u_2, u_3\}$ が $\text{Ker}(A)$ の基底で、 $\dim(\text{Ker}(A)) = 3$ 。← 解 x の自由度=3 とも言う。

#28-4.

↓
 これは何を言っている？
 #29-1.
 x_2, x_4, x_5 に対応していた
 x_1, x_3 に対応していた。
 事実: $x \in \mathbb{R}^5$ に対し、 $J = \dim(\text{Ker}(A))$ 個のパラメータ c_1, c_2, c_3 を用いて $Ax=0$ の解を書けた。
 この時、 $5-J=2$ は、 $\text{rank}(A)=2$ と一致した。
 より、

Th. 4.4.3 (線形写像の重要な定理として Th. 5.1.2 で再登場するよ)

$A = \begin{matrix} & \overset{n}{\curvearrowright} \\ m & \text{ } m \times n \text{ 行列のとき、} \end{matrix} \quad n = \text{rank}(A) + \underbrace{\dim(\text{Ker}(A))}_{\substack{\text{Aから欠けた次数というニュアンスで} \\ \text{Aの退化次数と言ったりするよ。}}}$ である。

例. 上の例だと、 $\overset{n}{5} = \overset{\text{rank}(A)}{2} + \overset{\dim(\text{Ker}(A))}{3}$ だね。

(教科書でここ出てくる定義)

#24-2, #28-1 をどぞ出てきた

$\text{Span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = u_1, u_2, \dots, u_n$ の一次結合全体による集合
 ($u_1, u_2, \dots, u_n$ によって生成されたベクトル空間 なんてとも言ったね)

を教科書では

$\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ なんて書いたりする。

#29-2

(おまけ)

教p.86 問1(5)の解法: 内は, $W := \{f(x) \in \mathcal{R}[x]_3 \mid f(1)=0, f'(1)=0\}$ の基底 etc. について.

#30-1

Ans. まず, $\mathcal{R}[x]_3$ の基底をなんでも良いので1つ用意して $f(x)$ を具体的に表現できるようにしよう.

まあシンプルなものは $B_1 := \{1, x, x^2, x^3\}$ かな. これを採用すると,

この $C_0 \sim C_3$ は座標と呼ばれる.

$f(x) \in \mathcal{R}[x]_3$ は $f(x) = C_0 \cdot 1 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3$ と表わせる.

そしてもう2つの条件が座標 $C_0 \sim C_3$ にどう影響するかと見てみると

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Leftrightarrow C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ f'(1) = 0 \Leftrightarrow C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0 \end{cases} \quad \text{とある.}$$

$$\text{これは} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{と書き直して扱うと分かり易いのでそうしよう.} \sim (1)$$

#30-3

座標で (C_0, C_1, C_2, C_3) ということはそのベクトルは $C_0 \cdot 1 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3$ ということだったので,

座標で e_1, e_2 と表わされる2つのベクトルは各々

ベクトルの基底と座標の関係を明確に意識すると良い.

$$\begin{cases} u_1 = 1 \cdot 1 - 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = 1 - 2x + x^2, \\ u_2 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 = 2 - 3x + x^3 \end{cases} \quad \text{のことを指している.}$$

よって,

$$W \text{ の基底} = \{1 - 2x + x^2, 2 - 3x + x^3\} \quad \text{とすることができ}$$

ということが分かり, 同時に, $\dim W = 2$ ということも分かる.

(完).

#30-2

で, (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$ と書いて, #28-4 と同じ計算. つまり, 簡約化してベクトル空間を分析する.

$$\text{まず, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{と(1回の操作で)簡約化が完了し.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot C_0 + 0 \cdot C_1 - 1 \cdot C_2 - 2 \cdot C_3 = 0, \\ 0 \cdot C_0 + 1 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{とあるので, } C_0 \text{ と } C_1 \text{ はこの式で決まり,} \\ \text{残りの } C_2, C_3 \text{ は自由パラメータを導入することになる.} \end{array}$$

$$\text{よって} \begin{cases} C_0 = C_2 + 2C_3, \\ C_1 = -2C_2 - 3C_3, \\ C_2 = p_1, \text{ (パラメータ)} \\ C_3 = p_2, \text{ (パラメータ)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + 2p_2 \\ -2p_1 - 3p_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = p_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + p_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \quad \text{と書ける.}$$

よって, 座標で見ると基底を $\{e_1, e_2\}$ として良いということが分かる.